

Aufgabe 5f: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 6)$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$(x + 2)(x - 3)(x - 6) = 0$$

Die Gleichung liegt bereits in Produktform vor. Deshalb können wir direkt den Satz vom Nullprodukt anwenden.

1. Schritt: Produktform erkennen

Die Gleichung lautet:

$$(x + 2)(x - 3)(x - 6) = 0$$

Auf der linken Seite steht ein Produkt aus drei Faktoren:

$$(x + 2)$$

$$(x - 3)$$

$$(x - 6)$$

Damit liegt die Gleichung bereits in Produktform vor.

Merke

Wenn ein Produkt gleich 0 ist, dann muss mindestens ein Faktor gleich 0 sein.
Das ist der Satz vom Nullprodukt:

$$a \cdot b \cdot c = 0$$

Dann gilt:

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0 \quad \text{oder} \quad c = 0$$

2. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Wir wenden den Satz vom Nullprodukt auf

$$(x + 2)(x - 3)(x - 6) = 0$$

an.

Also gilt:

$$x + 2 = 0$$

oder

$$x - 3 = 0$$

oder

$$x - 6 = 0$$

3. Schritt: Faktoren einzeln gleich 0 setzen

Die einzelnen Gleichungen lauten:

$$x + 2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x - 6 = 0$$

Jetzt lösen wir jede Gleichung einzeln.

4. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen und Lösungsmenge angeben

Zuerst:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 0 & | -2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 & | +3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned} x - 6 &= 0 & | +6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die drei Lösungen:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 6$$

Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \{-2; 3; 6\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 6)$$

hat die Nullstellen

$$x = -2, \quad x = 3, \quad x = 6$$

Also gilt:

$$L = \{-2; 3; 6\}$$