

Aufgabe 6a: Berechne die Extremstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Berechne die Extremstellen der Funktion und gib sie an.

Lösung

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion.

Extremstellen berechnet man mit der notwendigen Bedingung

$$f'(x) = 0$$

Um anschließend zu prüfen, ob wirklich eine Extremstelle vorliegt, verwenden wir die hinreichende Bedingung

$$f''(x) \neq 0$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen von $f''(x)$, ob ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt vorliegt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Extremstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind zunächst nur die x -Werte der Extrempunkte.

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir später nur als Zusatz, damit wir die Extrempunkte vollständig angeben können.

1. Schritt: $f'(x)$ bilden

Die Funktion lautet:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Damit gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

2. Schritt: $f''(x)$ bilden

Jetzt bilden wir die zweite Ableitung.

Aus

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

wird:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Damit gilt:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Merke

Für Extremstellen gilt:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

Wenn

$$f''(x) < 0$$

liegt ein Hochpunkt vor.

Wenn

$$f''(x) > 0$$

liegt ein Tiefpunkt vor.

3. Schritt: Notwendige Bedingung anwenden

Die notwendige Bedingung lautet:

$$f'(x) = 0$$

Also setzen wir:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Jetzt lösen wir die Gleichung:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

lösen wir mit der pq -Formel.

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -4 \quad \text{und} \quad q = 3$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} \\ &= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} \\ &= 2 \pm \sqrt{4 - 3} \\ &= 2 \pm \sqrt{1} \\ &= 2 \pm 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 2 - 1 = 1$$

$$x_2 = 2 + 1 = 3$$

Die möglichen Extremstellen liegen also bei:

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Auch mit der Mitternachtsformel erhalten wir also die möglichen Extremstellen:

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

4. Schritt: Hinreichende Bedingung anwenden

Die hinreichende Bedingung lautet:

$$f''(x) \neq 0$$

Wir prüfen die beiden möglichen Extremstellen mit

$$f''(x) = 6x - 12$$

Für $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} f''(1) &= 6 \cdot 1 - 12 \\ &= 6 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Da

$$f''(1) < 0$$

liegt bei

$$x = 1$$

ein Hochpunkt vor.

Für $x_2 = 3$:

$$\begin{aligned} f''(3) &= 6 \cdot 3 - 12 \\ &= 18 - 12 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Da

$$f''(3) > 0$$

liegt bei

$$x = 3$$

ein Tiefpunkt vor.

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.

Gesucht waren nur die Extremstellen, also die x -Werte:

$$x = 1 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Extrempunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die x -Werte in die Ausgangsfunktion ein:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Für $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 \\ &= 1 - 6 + 9 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Damit ist der Hochpunkt:

$$H(1 \mid 4)$$

Für $x_2 = 3$:

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 \\ &= 27 - 54 + 27 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist der Tiefpunkt:

$$T(3 \mid 0)$$

Ergebnis

Die gesuchten Extremstellen sind:

$$\boxed{x = 1} \quad \text{und} \quad \boxed{x = 3}$$

Zusatz: Die zugehörigen Extrempunkte sind:

$$\boxed{H(1 \mid 4)}$$

und

$$\boxed{T(3 \mid 0)}$$