

Aufgabe 6b: Berechne die Extremstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$$

Berechne die Extremstellen der Funktion und gib sie an.

Lösung

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion.

Extremstellen berechnet man mit der notwendigen Bedingung

$$f'(x) = 0$$

Um anschließend zu prüfen, ob wirklich eine Extremstelle vorliegt, verwenden wir die hinreichende Bedingung

$$f''(x) \neq 0$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen von $f''(x)$, ob ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt vorliegt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Extremstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind zunächst nur die x -Werte der Extrempunkte.

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir später nur als Zusatz, damit wir die Extrempunkte vollständig angeben können.

1. Schritt: $f'(x)$ bilden

Die Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x \\ &= x^3 - 4x \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

2. Schritt: $f''(x)$ bilden

Jetzt bilden wir die zweite Ableitung.

Aus

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

wird:

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

Damit gilt:

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

Merke

Für Extremstellen gilt:

$$\text{notwendige Bedingung: } f'(x) = 0$$

$$\text{hinreichende Bedingung: } f''(x) \neq 0$$

Wenn

$$f''(x) < 0$$

liegt ein Hochpunkt vor.

Wenn

$$f''(x) > 0$$

liegt ein Tiefpunkt vor.

3. Schritt: Notwendige Bedingung anwenden

Die notwendige Bedingung lautet:

$$f'(x) = 0$$

Also setzen wir:

$$x^3 - 4x = 0$$

Jetzt lösen wir die Gleichung:

$$x^3 - 4x = 0$$

Wir klammern x aus:

$$x(x^2 - 4) = 0$$

Jetzt wenden wir den Satz vom Nullprodukt an:

$$x = 0$$

oder

$$x^2 - 4 = 0$$

Die zweite Gleichung lösen wir nach x auf:

$$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$$

Die möglichen Extremstellen liegen also bei:

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2$$

4. Schritt: Hinreichende Bedingung anwenden

Die hinreichende Bedingung lautet:

$$f''(x) \neq 0$$

Wir prüfen die drei möglichen Extremstellen mit

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} f''(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 - 4 \\ &= 3 \cdot 4 - 4 \\ &= 12 - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Da

$$f''(-2) > 0$$

liegt bei

$$x = -2$$

ein Tiefpunkt vor.

Für $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 3 \cdot 0^2 - 4 \\ &= 0 - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Da

$$f''(0) < 0$$

liegt bei

$$x = 0$$

ein Hochpunkt vor.

Für $x_3 = 2$:

$$\begin{aligned} f''(2) &= 3 \cdot 2^2 - 4 \\ &= 3 \cdot 4 - 4 \\ &= 12 - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Da

$$f''(2) > 0$$

liegt bei

$$x = 2$$

ein Tiefpunkt vor.

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.
Gesucht waren nur die Extremstellen, also die x -Werte:

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Extrempunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die x -Werte in die Ausgangsfunktion ein:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4 + 1 \\ &= 4 - 8 + 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Damit ist der erste Tiefpunkt:

$$T_1(-2 \mid -3)$$

Für $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 \\ &= 0 - 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist der Hochpunkt:

$$H(0 \mid 1)$$

Für $x_3 = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4 + 1 \\ &= 4 - 8 + 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Damit ist der zweite Tiefpunkt:

$$T_2(2 \mid -3)$$

Ergebnis

Die gesuchten Extremstellen sind:

$$x = -2$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

Zusatz: Die zugehörigen Extrempunkte sind:

$$T_1(-2 \mid -3)$$

$$H(0 \mid 1)$$

$$T_2(2 \mid -3)$$