

Aufgabe 6d: Berechne die Extremstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Berechne die Extremstellen der Funktion und gib sie an.

Lösung

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion.

Extremstellen berechnet man mit der notwendigen Bedingung

$$f'(x) = 0$$

Um anschließend zu prüfen, ob wirklich eine Extremstelle vorliegt, verwenden wir die hinreichende Bedingung

$$f''(x) \neq 0$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen von $f''(x)$, ob ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt vorliegt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Extremstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind zunächst nur die x -Werte der Extrempunkte.

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir später nur als Zusatz, damit wir die Extrempunkte vollständig angeben können.

1. Schritt: $f'(x)$ bilden

Die Funktion lautet:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Damit gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

2. Schritt: $f''(x)$ bilden

Jetzt bilden wir die zweite Ableitung.

Aus

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

wird:

$$f''(x) = 6x$$

Damit gilt:

$$f''(x) = 6x$$

Merke

Für Extremstellen gilt:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

Wenn

$$f''(x) < 0$$

liegt ein Hochpunkt vor.

Wenn

$$f''(x) > 0$$

liegt ein Tiefpunkt vor.

3. Schritt: Notwendige Bedingung anwenden

Die notwendige Bedingung lautet:

$$f'(x) = 0$$

Also setzen wir:

$$3x^2 - 12 = 0$$

Jetzt lösen wir die Gleichung:

$$3x^2 - 12 = 0 \quad | + 12$$

$$3x^2 = 12 \quad | : 3$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Die möglichen Extremstellen liegen also bei:

$$x = -2 \quad \text{und} \quad x = 2$$

4. Schritt: Hinreichende Bedingung anwenden

Die hinreichende Bedingung lautet:

$$f''(x) \neq 0$$

Wir prüfen die beiden möglichen Extremstellen mit

$$f''(x) = 6x$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} f''(-2) &= 6 \cdot (-2) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Da

$$f''(-2) < 0$$

liegt bei

$$x = -2$$

ein Hochpunkt vor.

Für $x_2 = 2$:

$$\begin{aligned} f''(2) &= 6 \cdot 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Da

$$f''(2) > 0$$

liegt bei

$$x = 2$$

ein Tiefpunkt vor.

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.

Gesucht waren nur die Extremstellen, also die x -Werte:

$$x = -2 \quad \text{und} \quad x = 2$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Extrempunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die x -Werte in die Ausgangsfunktion ein:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 12 \cdot (-2) \\ &= -8 + 24 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Damit ist der Hochpunkt:

$$H(-2 \mid 16)$$

Für $x_2 = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 12 \cdot 2 \\ &= 8 - 24 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Damit ist der Tiefpunkt:

$$T(2 \mid -16)$$

Ergebnis

Die gesuchten Extremstellen sind:

$$\boxed{x = -2} \quad \text{und} \quad \boxed{x = 2}$$

Zusatz: Die zugehörigen Extrempunkte sind:

$$\boxed{H(-2 \mid 16)}$$

und

$$\boxed{T(2 \mid -16)}$$