

Probeklausur

Ganzrationale Gleichungen lösen

Ausführliche Lösungen

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1: Lösungsstrategien erkennen	2
Aufgabe 2: Lösungen von Gleichungen	8
Aufgabe 2a	8
Aufgabe 2b	10
Aufgabe 2c	14
Aufgabe 2d	17
Aufgabe 2e	22
Aufgabe 2f	24
Aufgabe 2g	27
Aufgabe 2h	30
Aufgabe 3: Gleichungen lösen	32
Aufgabe 3a	32
Aufgabe 3b	35
Aufgabe 3c	39
Aufgabe 3d	41
Aufgabe 3e	46
Aufgabe 4: Schnittpunkte berechnen	50
Aufgabe 4a	50
Aufgabe 4b	54
Aufgabe 4c	57
Aufgabe 4d	61
Aufgabe 5: Nullstellen berechnen	65
Aufgabe 5a	65
Aufgabe 5b	69
Aufgabe 5c	71
Aufgabe 5d	74
Aufgabe 5e	78
Aufgabe 5f	81
Aufgabe 6: Extremstellen berechnen	83
Aufgabe 6a	83
Aufgabe 6b	88
Aufgabe 6c	93
Aufgabe 6d	98

Aufgabe 1

Lösungsstrategien erkennen

Aufgabe 1: Erkenne die Lösungsstrategie

Ordne jeder Gleichung eine sinnvolle Lösungsstrategie zu. Du musst noch nicht rechnen.

Wichtig ist hier: Du sollst nicht direkt losrechnen, sondern zuerst erkennen, welche Methode am besten passt.

Lösung

	Gleichung	passende Strategie	Woran erkennt man das?
a)	$(x + 3)(x - 5) = 0$	Satz vom Nullprodukt	Links steht insgesamt ein fertiges Produkt und rechts steht 0. Die Additionen und Subtraktionen stehen nur innerhalb der multiplizierten Klammern.
b)	$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$	Substitution	Es gibt ein Absolutglied. Die kleinste Potenz ist x^2 und die höhere Potenz x^4 ist ein ganzzahliges Vielfaches davon.
c)	$3x^3 + 6x^2 = 0$	Ausklammern und Satz vom Nullprodukt	Beide Summanden enthalten x^2 . Deshalb kann man zuerst x^2 ausklammern.
d)	$4x^2 + 12x + 5 = 0$	Mitternachtsformel oder pq-Formel	Es kommen x^2 , x und eine Zahl vor. Deshalb passt eine quadratische Lösungsformel.
e)	$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$	Polynomdivision oder Horner-Schema	Die Gleichung hat Grad 3. Andere einfache Strategien passen hier nicht. Deshalb sucht man zuerst eine einfache Lösung.
f)	$7x^4 - 112 = 0$	Umformen und Wurzelziehen	Es kommt nur eine Potenz von x vor, nämlich x^4 . Deshalb kann man nach dieser Potenz umformen und dann die passende Wurzel ziehen.
g)	$x(x + 4) - 5 = 0$	Erst ausmultiplizieren, dann pq-Formel oder Mitternachtsformel	Es ist kein fertiges Produkt gleich 0, weil noch -5 dahinter steht. Erst muss man vereinfachen. Danach erhält man eine Gleichung mit x^2 , x und einer Zahl.
h)	$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$	Polynomdivision oder Horner-Schema	Die Gleichung hat Grad 3. Keine andere einfache Lösungsstrategie passt hier. Deshalb bleibt Polynomdivision oder Horner-Schema.

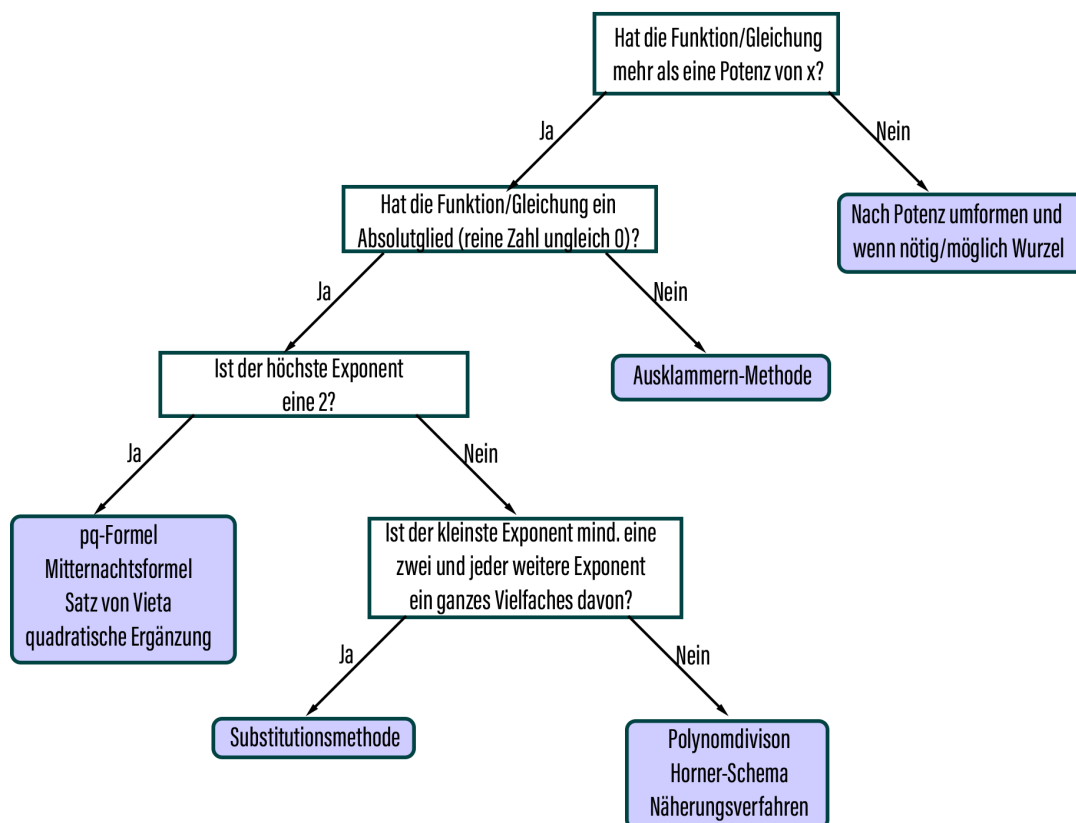
Merke

Frage dich immer in dieser Reihenfolge:

- 1) Steht dort schon ein fertiges Produkt gleich 0? Dann: Satz vom Nullprodukt.
- 2) Gibt es einen gemeinsamen Faktor in allen Summanden? Dann: Ausklammern und danach Satz vom Nullprodukt.
- 3) Kommt nur eine Potenz von x vor, zum Beispiel nur x^2 oder nur x^4 ? Dann: Nach Potenz umformen und wenn nötig/möglich Wurzel ziehen.
- 4) Gibt es ein Absolutglied, ist die kleinste Potenz mindestens 2 und ist jeder weitere Exponent ein ganzzahliges Vielfaches davon? Dann: Substitution.
- 5) Entsteht eine Gleichung mit x^2 , x und einer Zahl? Dann: pq-Formel oder Mitternachtsformel.
- 6) Passt keine andere einfache Strategie und die Gleichung hat Grad 3 oder höher? Dann: Polynomdivision oder Horner-Schema.

Hilfestellung: Schema zur Strategiewahl

Wenn du unsicher bist, kannst du dich zusätzlich an diesem Schema orientieren:



Einfache Erklärungen zu jeder Teilaufgabe

a) $(x + 3)(x - 5) = 0$

Hier sieht man sofort:

$$(x + 3)(x - 5) = 0$$

Wichtig: Die einzigen Additionen und Subtraktionen, die man sieht, stehen innerhalb der multiplizierten Klammern.

$$(x + 3)(x - 5)$$

Außerhalb der Klammern steht kein $+5$, kein -3 und keine andere zusätzliche Zahl.

Deshalb ist die linke Seite ein fertiges Produkt, das gleich 0 ist.

Dann passt der **Satz vom Nullprodukt**.

b) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

Hier kann man sich am Schema orientieren.

Zuerst sieht man: Es gibt ein Absolutglied, nämlich

$$64$$

Dann schaut man auf die Potenzen von x :

$$x^2 \quad \text{und} \quad x^4$$

Die kleinste Potenz ist x^2 . Das bedeutet: Der kleinste Exponent ist 2.

Jetzt prüft man die höhere Potenz:

$$x^4$$

Der Exponent 4 ist ein ganzzahliges Vielfaches von 2, denn

$$4 = 2 \cdot 2$$

Genau dann passt die **Substitution**.

Man setzt also

$$z = x^2$$

Dann wird aus x^4 nämlich z^2 .

Deshalb passt hier die **Substitution**.

c) $3x^3 + 6x^2 = 0$

Hier haben beide Summanden etwas gemeinsam:

$$3x^3 + 6x^2 = 0$$

In beiden Summanden steckt x^2 .

$$3x^3 = x^2 \cdot 3x$$

$$6x^2 = x^2 \cdot 6$$

Deshalb kann man x^2 ausklammern:

$$x^2(3x + 6) = 0$$

Danach steht ein fertiges Produkt gleich 0. Dann nutzt man den Satz vom Nullprodukt.

Außerdem sieht man: In der Klammer steht nun eine Gleichung mit x und einer Zahl. Wenn man weiter vereinfacht, entsteht eine sehr einfache lineare Gleichung.

Deshalb passt hier **Ausklammern und Satz vom Nullprodukt**.

d) $4x^2 + 12x + 5 = 0$

Hier sieht man die typische Form einer quadratischen Gleichung:

$$x^2, \quad x, \quad \text{Zahl}$$

Genauer gesagt:

$$4x^2 + 12x + 5 = 0$$

Es gibt also einen x^2 -Term, einen x -Term und ein Absolutglied.

Deshalb passt hier eine quadratische Lösungsformel.

Es gibt zwei sinnvolle Möglichkeiten:

- **Mitternachtsformel:** direkt anwendbar bei $ax^2 + bx + c = 0$
- **pq-Formel:** wenn man die Gleichung vorher so umformt, dass vor x^2 eine 1 steht

Deshalb passt hier **Mitternachtsformel oder pq-Formel**.

e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Die höchste Potenz ist x^3 . Also hat die Gleichung Grad 3.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Jetzt schaut man, ob eine einfachere Strategie passt:

- Es ist kein fertiges Produkt gleich 0.
- Man kann nicht alles gemeinsam ausklammern.
- Es kommt nicht nur eine einzige Potenz von x vor.
- Es ist keine typische Substitutionsgleichung.
- Es ist auch keine quadratische Gleichung.

Also geht keine andere einfache Lösungsstrategie.

Dann bleibt **Polynomdivision oder Horner-Schema**.

Meistens sucht man dafür zuerst eine einfache **Lösung**, zum Beispiel unter den Teilern der Zahl 6:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Deshalb passt hier **Polynomdivision oder Horner-Schema**.

f) $7x^4 - 112 = 0$

Hier kommt nur eine einzige Potenz von x vor:

$$x^4$$

Außerdem gibt es nur noch eine Zahl.

$$7x^4 - 112 = 0$$

Es gibt also kein x^3 , kein x^2 und kein x .

Deshalb passt hier die Strategie:

nach der Potenz umformen und dann Wurzel ziehen

Man muss also nach x^4 auflösen und anschließend die passende Wurzel ziehen.

Deshalb passt hier **Umformen und Wurzelziehen**.

g) $x(x + 4) - 5 = 0$

Achtung: Viele denken hier zuerst an den Satz vom Nullprodukt.

$$x(x + 4) - 5 = 0$$

Aber das geht hier noch nicht, weil nach dem Produkt noch -5 kommt.

Also muss man zuerst vereinfachen, also ausmultiplizieren.

Danach erhält man eine Gleichung mit

$$x^2, \quad x, \quad \text{und einer Zahl}$$

Genau dann passt wieder eine quadratische Lösungsformel.

Deshalb passt hier:

erst ausmultiplizieren, dann pq-Formel oder Mitternachtsformel

h) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

Die höchste Potenz ist x^3 . Also hat die Gleichung Grad 3.

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

Jetzt prüft man wieder die einfacheren Strategien:

- Es ist kein fertiges Produkt gleich 0.
- Es gibt keinen gemeinsamen Faktor in allen Summanden.
- Es kommt nicht nur eine einzige Potenz von x vor.
- Es ist keine typische Substitutionsgleichung.
- Es ist keine quadratische Gleichung.

Also passt keine andere einfache Lösungsstrategie.

Dann bleibt **Polynomdivision oder Horner-Schema**.

Auch hier sucht man meistens zuerst eine einfache **Lösung**, zum Beispiel unter den Teilern der Zahl 18:

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm 9, \quad \pm 18$$

Deshalb passt hier **Polynomdivision oder Horner-Schema**.

Aufgabe 2a: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Die Gleichung ist bereits als Produkt geschrieben. Deshalb können wir den Satz vom Nullprodukt anwenden.

1. Schritt: Produktform erkennen

Die linke Seite der Gleichung besteht aus einem Produkt aus zwei Faktoren:

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Die beiden Faktoren sind:

$$x - 3$$

und

$$x + 2$$

Da dieses Produkt gleich 0 ist, muss mindestens einer der beiden Faktoren gleich 0 sein.

Merke

Satz vom Nullprodukt:

$$a \cdot b = 0$$

gilt genau dann, wenn

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0$$

ist.

2. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Wir wenden den Satz vom Nullprodukt auf die Gleichung an:

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Also gilt:

$$x - 3 = 0$$

oder

$$x + 2 = 0$$

3. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen

Jetzt lösen wir beide Gleichungen einzeln.

$$\begin{aligned}x - 3 &= 0 & | + 3 \\x &= 3\end{aligned}$$

Damit ist die erste Lösung:

$$x_1 = 3$$

Nun lösen wir die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned}x + 2 &= 0 & | - 2 \\x &= -2\end{aligned}$$

Damit ist die zweite Lösung:

$$x_2 = -2$$

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 3$$

und

$$x_2 = -2$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-2; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x_1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = -2$$

Also gilt:

$$L = \{-2; 3\}$$

Aufgabe 2b: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Die Vor-Vorarbeit können wir hier überspringen, da die Gleichung bereits alle vier Merkmale erfüllt:

$$\text{Term} = 0$$

Die Gleichung ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da in der Gleichung nur x^4 , x^2 und eine reine Zahl vorkommen, liegt eine biquadratische Gleichung vor. Deshalb verwenden wir die Substitutionsmethode.

1. Schritt: Vor-Vorarbeit prüfen

Normalerweise prüfen wir zuerst, ob die Gleichung vorbereitet werden muss.

Die vier Merkmale sind:

1. In die Form $\text{Term} = 0$ bringen
2. Klammerfrei schreiben
3. Vollständig zusammenfassen
4. Nach absteigenden Potenzen ordnen

Bei der Gleichung

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

sind bereits alle vier Merkmale erfüllt. Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

Auffällig ist außerdem, dass nur diese Bestandteile vorkommen:

$$x^4, \quad x^2, \quad \text{reine Zahl}$$

Damit liegt eine biquadratische Gleichung vor. Deshalb lösen wir die Gleichung mit der Substitutionsmethode.

2. Schritt: Substitution $z = x^2$

Wir ersetzen die kleinste vorkommende Potenz durch z :

$$z = x^2$$

Dann gilt automatisch:

$$z^2 = (x^2)^2 = x^4$$

Damit können wir die Gleichung

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

umschreiben zu:

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

Merke

Bei einer Substitution ersetzt man einen komplizierten Ausdruck durch eine neue Variable.
Hier gilt:

$$z = x^2$$

und damit:

$$z^2 = x^4$$

Aus der Gleichung in x wird dadurch zuerst eine einfachere Gleichung in z .

3. Schritt: Neue Gleichung in z lösen

Jetzt lösen wir die neue Gleichung:

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel. Dafür schreiben wir:

$$p = -17 \quad \text{und} \quad q = 16$$

Die pq -Formel lautet:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{-17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-17}{2}\right)^2 - 16} \\ &= \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{64}{4}} \\ &= \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} \\ &= \frac{17}{2} \pm \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{17}{2} - \frac{15}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ z_2 &= \frac{17}{2} + \frac{15}{2} = \frac{32}{2} = 16 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -17, \quad c = 16$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \\ &= \frac{17 \pm 15}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{17 - 15}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ z_2 &= \frac{17 + 15}{2} = \frac{32}{2} = 16 \end{aligned}$$

Die Mitternachtsformel liefert also dieselben Zwischenlösungen:

$$z_1 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = 16$$

4. Schritt: Rücksubstitution $z = x^2$

Jetzt gehen wir wieder zurück zu x . Wir wissen:

$$z = x^2$$

Außerdem haben wir gefunden:

$$z_1 = 1 \quad \text{und} \quad z_2 = 16$$

Also gilt:

$$x^2 = 1$$

oder

$$x^2 = 16$$

5. Schritt: Nach x auflösen

Jetzt lösen wir beide Gleichungen einzeln.

Für die erste Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \quad |\sqrt{} \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Also erhalten wir:

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

Für die zweite Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \quad |\sqrt{} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Also erhalten wir:

$$x_3 = -4 \quad \text{und} \quad x_4 = 4$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die Lösungen sind:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 4$$

Sortiert schreiben wir:

$$-4, -1, 1, 4$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-4; -1; 1; 4\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -4, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad x = 4$$

Also gilt:

$$L = \{-4; -1; 1; 4\}$$

Aufgabe 2c: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine quadratische Gleichung vorliegt, können wir sie mit der pq -Formel lösen. Dafür müssen wir die Gleichung zuerst normieren, da vor x^2 noch der Faktor 4 steht.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Gleichung normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Bei unserer Gleichung steht vor x^2 aber noch der Faktor 4:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Deshalb teilen wir die gesamte Gleichung durch 4:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0 \quad | : 4$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$$

Merke

Die pq -Formel darf man nur direkt anwenden, wenn vor x^2 der Faktor 1 steht.

Die Gleichung muss also die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

haben.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die normierte Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$$

Wir vergleichen mit der allgemeinen Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = \frac{25}{4}$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen $p = -5$ und $q = \frac{25}{4}$ ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{0} \\ &= \frac{5}{2} \pm 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

auch direkt mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

gilt:

$$a = 4, \quad b = -20, \quad c = 25$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} \\&= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8} \\&= \frac{20 \pm \sqrt{0}}{8} \\&= \frac{20 \pm 0}{8} \\&= \frac{20}{8} \\&= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Auch mit der Mitternachtsformel erhalten wir also:

$$x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Wir haben nur eine Lösung erhalten:

$$x = \frac{5}{2}$$

Da die Wurzel in der pq -Formel gleich 0 war, handelt es sich um eine doppelte Lösung.
Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösung

$$x = \frac{5}{2}$$

Also gilt:

$$L = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

Aufgabe 2d: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine ganzrationale Gleichung dritten Grades vorliegt, suchen wir zuerst eine Lösung. Danach können wir mit einer Polynomdivision den Grad der Gleichung verringern. Alternativ zur Polynomdivision kann man auch das Horner-Schema verwenden.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nullstelle erraten

Bei einer ganzrationalen Gleichung dritten Grades versuchen wir zuerst, eine Nullstelle zu finden. Mögliche ganzzahlige Kandidaten sind die Teiler des Absolutgliedes 6:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Wir testen $x = 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 &= 1 - 2 - 5 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist

$$x_1 = 1$$

eine Lösung der Gleichung.

Merke

Wenn $x = 1$ eine Lösung der Gleichung ist, dann ist

$$x - 1$$

ein Faktor des Terms.

Deshalb teilen wir den Term anschließend durch

$$x - 1$$

3. Schritt: Polynomdivision durchführen

Wir teilen den Term

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

durch

$$x - 1$$

Die Polynomdivision lautet:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - 1x^2)} \\
 -1x^2 - 5x \\
 \underline{-(-1x^2 + 1x)} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{-(-6x + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Da am Ende 0 übrig bleibt, ist die Polynomdivision aufgegangen.

Alternative: Horner-Schema

Alternativ zur Polynomdivision kann man auch das Horner-Schema verwenden.

Die Koeffizienten des Terms

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

sind:

$$1 \quad -2 \quad -5 \quad 6$$

Da $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, verwenden wir im Horner-Schema die Zahl 1:

	1	-2	-5	6
		$1 \cdot 1 =$	$1 \cdot (-1) =$	$1 \cdot (-6) =$
		1	-1	-6
$x_1 = 1$	1	-1	-6	0

Damit erhält man unten die Koeffizienten der quadratischen Gleichung:

$$1x^2 - 1x - 6$$

Die restliche Gleichung lautet also:

$$1x^2 - 1x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Also gilt insgesamt:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

4. Schritt: Quadratische Gleichung erhalten

Durch die Polynomdivision haben wir den Term zerlegt:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

die Gleichung

$$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x - 1 = 0$$

oder

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Die erste Gleichung liefert wieder:

$$x_1 = 1$$

Jetzt müssen wir noch die quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

5. Schritt: Quadratische Gleichung lösen

Die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel. Alternativ kann man auch die Mitternachtsformel verwenden.

Wir vergleichen mit

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -1 \quad \text{und} \quad q = -6$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-6)} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ x_3 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1 - 5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ x_3 &= \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-2, 1, 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-2; 1; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -2, \quad x = 1, \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-2; 1; 3\}$$

Aufgabe 2e: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$3x^2 - 27 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$3x^2 - 27 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da nur x^2 und eine reine Zahl vorkommen, können wir direkt nach x^2 auflösen und anschließend die Wurzel ziehen.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$3x^2 - 27 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nach x^2 auflösen

Jetzt lösen wir die Gleichung nach x^2 auf.

$$3x^2 - 27 = 0 \quad | + 27$$

$$3x^2 = 27 \quad | : 3$$

$$x^2 = 9$$

Damit haben wir die Gleichung auf die Form

$$x^2 = 9$$

gebracht.

Merke

Wenn du eine Gleichung der Form

$$x^2 = a$$

hast, musst du beim Wurzelziehen beide Lösungen beachten:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Das bedeutet: Es kann eine positive und eine negative Lösung geben.

3. Schritt: Beide Wurzeln beachten

Aus

$$x^2 = 9$$

ziehen wir die Wurzel.

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \quad |\sqrt{} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Also erhalten wir zwei Lösungen:

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$3x^2 - 27 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -3 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-3; 3\}$$

Aufgabe 2f: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da in beiden Summanden ein gemeinsamer Faktor vorkommt, verwenden wir die Ausklammern-Methode. Dafür klammern wir die kleinste Potenz von x aus.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Kleinste Potenz ausklammern

Jetzt suchen wir den gemeinsamen Faktor der beiden Summanden:

$$2x^3 + 6x^2$$

Wir schreiben uns die beiden Summanden genauer an:

$$2x^3 = 2 \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$6x^2 = 6 \cdot x \cdot x$$

In beiden Summanden kommt x^2 vor. Deshalb klammern wir x^2 aus:

$$2x^3 + 6x^2 = x^2(2x + 6)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

die Gleichung

$$x^2(2x + 6) = 0$$

Merke

Wenn in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor vorkommt, kann man diesen Faktor ausklammern. Hier ist die kleinste Potenz:

$$x^2$$

Deshalb gilt:

$$2x^3 + 6x^2 = x^2(2x + 6)$$

3. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Jetzt liegt die Gleichung in Produktform vor:

$$x^2(2x + 6) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x^2 = 0$$

oder

$$2x + 6 = 0$$

Das bedeutet: Mindestens einer der beiden Faktoren muss gleich 0 sein.

4. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen

Jetzt lösen wir die beiden Gleichungen einzeln.

Zuerst:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 & | \sqrt{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 0$$

Nun lösen wir die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} 2x + 6 &= 0 & | -6 \\ 2x &= -6 & | :2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = -3$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, 0$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; 0\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$2x^3 + 6x^2 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -3 \quad \text{und} \quad x = 0$$

Also gilt:

$$L = \{-3; 0\}$$

Aufgabe 2g: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine quadratische Gleichung vorliegt und vor x^2 bereits der Faktor 1 steht, können wir direkt die pq -Formel verwenden.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Wenn nötig normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Bei unserer Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

steht vor x^2 bereits der Faktor 1.

Die Gleichung ist also schon normiert. Wir müssen hier nichts mehr teilen.

Merke

Die pq -Formel darf man direkt anwenden, wenn die Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

hat.

Das bedeutet: Vor x^2 muss der Faktor 1 stehen.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die Gleichung lautet:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Wir vergleichen mit der allgemeinen Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = 2 \quad \text{und} \quad q = -8$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen

$$p = 2 \quad \text{und} \quad q = -8$$

ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)} \\ &= -1 \pm \sqrt{1 + 8} \\ &= -1 \pm \sqrt{9} \\ &= -1 \pm 3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -1 - 3 = -4$$

$$x_2 = -1 + 3 = 2$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -8$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \\&= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \\&= \frac{-2 \pm 6}{2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \\x_2 &= \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2\end{aligned}$$

Auch mit der Mitternachtsformel erhalten wir also:

$$x_1 = -4 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = -4 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-4; 2\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -4 \quad \text{und} \quad x = 2$$

Also gilt:

$$L = \{-4; 2\}$$

Aufgabe 2h: Berechne die Lösung der Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

Die Gleichung ist bereits in Produktform gegeben. Deshalb können wir direkt den Satz vom Nullprodukt anwenden.

Da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn mindestens ein Faktor 0 ist, setzen wir jeden Faktor einzeln gleich 0.

1. Schritt: Produktform erkennen

Die Gleichung lautet:

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

Die linke Seite besteht aus einem Produkt aus drei Faktoren:

$$x + 4$$

$$x - 1$$

$$x - 5$$

Da dieses Produkt gleich 0 ist, muss mindestens einer dieser Faktoren gleich 0 sein.

Merke

Satz vom Nullprodukt:

Wenn ein Produkt gleich 0 ist, dann muss mindestens ein Faktor gleich 0 sein.

Also gilt zum Beispiel:

$$a \cdot b \cdot c = 0$$

genau dann, wenn

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0 \quad \text{oder} \quad c = 0$$

ist.

2. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Wir wenden den Satz vom Nullprodukt auf die Gleichung an:

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

Also setzen wir jeden Faktor einzeln gleich 0:

$$x + 4 = 0$$

oder

$$x - 1 = 0$$

oder

$$x - 5 = 0$$

3. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen

Jetzt lösen wir die drei Gleichungen einzeln.

Für den ersten Faktor gilt:

$$x + 4 = 0 \quad | -4$$

$$x = -4$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -4$$

Für den zweiten Faktor gilt:

$$x - 1 = 0 \quad | +1$$

$$x = 1$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = 1$$

Für den dritten Faktor gilt:

$$x - 5 = 0 \quad | +5$$

$$x = 5$$

Damit erhalten wir:

$$x_3 = 5$$

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 5$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-4; 1; 5\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$(x + 4)(x - 1)(x - 5) = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -4, \quad x = 1, \quad x = 5$$

Also gilt:

$$L = \{-4; 1; 5\}$$

Aufgabe 3a: Löse die Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

Hier starten wir mit der Vor-Vorarbeit. Das bedeutet: Wir bringen die Gleichung zuerst in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dann schreiben wir sie klammerfrei, fassen vollständig zusammen und ordnen nach absteigenden Potenzen.

Danach entsteht eine Gleichung, die wir nach x^2 auflösen können. Anschließend ziehen wir die Wurzel und beachten dabei beide Lösungen.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Gegeben ist:

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

Wir lösen zuerst die Klammer auf:

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

$$3x^2 - 6 - 5 = 2x^2 - 2$$

Nun fassen wir links zusammen:

$$3x^2 - 11 = 2x^2 - 2$$

Jetzt bringen wir alle Terme auf eine Seite:

$$3x^2 - 11 = 2x^2 - 2 \quad | - 2x^2$$

$$x^2 - 11 = -2 \quad | + 2$$

$$x^2 - 9 = 0$$

Damit ist die Gleichung jetzt in der gewünschten Form:

$$\text{Term} = 0$$

Außerdem ist sie:

1. klammerfrei,
2. vollständig zusammengefasst,
3. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$x^2 - 9 = 0$$

2. Schritt: Nach x^2 auflösen

Jetzt lösen wir die Gleichung nach x^2 auf.

Aus

$$x^2 - 9 = 0$$

machen wir:

$$x^2 - 9 = 0 \quad | +9$$

$$x^2 = 9$$

Damit haben wir die Gleichung auf die Form

$$x^2 = 9$$

gebracht.

Merke

Wenn du eine Gleichung der Form

$$x^2 = a$$

hast, musst du beim Wurzelziehen beide Lösungen beachten:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Das bedeutet: Es kann eine positive und eine negative Lösung geben.

3. Schritt: Beide Wurzeln beachten

Aus

$$x^2 = 9$$

ziehen wir die Wurzel.

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 3$$

Also erhalten wir zwei Lösungen:

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$3(x^2 - 2) - 5 = 2x^2 - 2$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -3 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-3; 3\}$$

Aufgabe 3b: Löse die Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0.$$

Die Gleichung ist bereits in der Form $\text{Term} = 0$ gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine ganzrationale Gleichung dritten Grades vorliegt, suchen wir zuerst eine Lösung. Danach verwenden wir das Horner-Schema, um den Grad der Gleichung zu verringern. Alternativ könnte man an dieser Stelle auch eine Polynomdivision durchführen.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0.$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$.
2. Die Gleichung ist klammerfrei.
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst.
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nullstelle erraten

Bei einer ganzrationalen Gleichung dritten Grades versuchen wir zuerst, eine Nullstelle zu finden. Mögliche ganzzahlige Kandidaten sind die Teiler des Absolutgliedes -6 :

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6.$$

Wir testen $x = 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 &= 1 + 4 + 1 - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $x_1 = 1$ eine Lösung der Gleichung.

Merke

Wenn $x = 1$ eine Lösung der Gleichung ist, dann ist $x - 1$ ein Faktor des Terms. Mit dem Horner-Schema können wir nun herausfinden, welcher quadratische Faktor noch übrig bleibt.

3. Schritt: Horner-Schema anwenden

Die Koeffizienten des Terms $x^3 + 4x^2 + x - 6$ sind

$$1 \quad 4 \quad 1 \quad -6$$

Da $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, verwenden wir im Horner-Schema die Zahl 1:

	1	4	1	-6
		$1 \cdot 1 =$	$1 \cdot 5 =$	$1 \cdot 6 =$
		1	5	6
$x_1 = 1$	1	5	6	0

Dabei wird die erste Zahl nach unten übernommen. Danach wird jeweils mit der Nullstelle 1 multipliziert und das Ergebnis zum nächsten Koeffizienten addiert:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 4 + 1 = 5, \quad 5 \cdot 1 = 5, \quad 1 + 5 = 6,$$

$$6 \cdot 1 = 6, \quad -6 + 6 = 0.$$

Der Rest ist 0. Die übrigen Koeffizienten liefern

$$1x^2 + 5x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

Die restliche Gleichung lautet also

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Alternative: Polynomdivision

Alternativ zum Horner-Schema kann man eine Polynomdivision durchführen. Da $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, teilen wir durch $x - 1$:

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad : (x - 1) = x^2 + 5x + 6 \\
 \underline{-(x^3 - 1x^2)} \\
 5x^2 + x \\
 \underline{-(5x^2 - 5x)} \\
 6x - 6 \\
 \underline{-(6x - 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Da am Ende 0 übrig bleibt, ist die Polynomdivision aufgegangen. Auch hier erhalten wir $x^2 + 5x + 6$.

4. Schritt: Quadratische Gleichung erhalten

Durch das Horner-Schema haben wir den Term zerlegt:

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6).$$

Damit wird aus der ursprünglichen Gleichung

$$(x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0.$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt gilt

$$x - 1 = 0$$

oder

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Die erste Gleichung liefert wieder $x_1 = 1$. Nun lösen wir die quadratische Gleichung.

5. Schritt: Quadratische Gleichung lösen

Wir verwenden die pq-Formel. Alternativ kann man die Mitternachtsformel verwenden. Aus

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

lesen wir $p = 5$ und $q = 6$ ab. Die pq-Formel lautet

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3, \\ x_3 &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2. \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Für die Gleichung $x^2 + 5x + 6 = 0$ gilt $a = 1$, $b = 5$ und $c = 6$.

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm 1}{2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder

$$x_2 = \frac{-5 - 1}{2} = -3 \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{-5 + 1}{2} = -2.$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ und $x_3 = -2$. Sortiert schreiben wir

$$-3, \quad -2, \quad 1.$$

Die Lösungsmenge lautet daher

$$\mathbb{L} = \{-3; -2; 1\}.$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 1$. Also gilt

$$\boxed{\mathbb{L} = \{-3; -2; 1\}}.$$

Aufgabe 3c: Löse die Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$2(x^2 + 4x)(x + 1)^2 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$2(x^2 + 4x)(x + 1)^2 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben.

Da die linke Seite bereits ein Produkt ist, können wir sofort den Satz vom Nullprodukt anwenden. Anschließend lösen wir die entstehenden Gleichungen einzeln.

1. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Die Gleichung liegt bereits in der Form $\text{Produkt} = 0$ vor:

$$2(x^2 + 4x)(x + 1)^2 = 0$$

Wir setzen jeden Faktor einzeln gleich 0:

$$\text{I) } 2 = 0$$

$$\text{II) } x^2 + 4x = 0$$

$$\text{III) } (x + 1)^2 = 0$$

Für den ersten Faktor gilt

$$\text{I) } 2 \neq 0$$

Der konstante Faktor 2 liefert deshalb keine Lösung.

2. Schritt: Gleichung II lösen

Wir betrachten nun die zweite Gleichung:

$$\text{II) } x^2 + 4x = 0$$

Beide Summanden enthalten x . Deshalb klammern wir x aus:

$$x(x + 4) = 0$$

Jetzt wenden wir wieder den Satz vom Nullprodukt an:

$$\text{IIa) } x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\text{IIb) } x + 4 = 0 \quad | -4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -4$$

3. Schritt: Gleichung III lösen

Jetzt lösen wir die dritte Gleichung:

$$\text{III) } (x + 1)^2 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \quad | \sqrt{}$$

$$x+1 = 0 \quad | -1$$

$$x_3 = -1$$

Da der Faktor $(x+1)$ quadriert ist, ist $x = -1$ eine doppelte Lösung. In der Lösungsmenge wird sie dennoch nur einmal notiert.

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die Lösungen sind:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -1$$

Sortiert schreiben wir:

$$-4, -1, 0$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$\mathbb{L} = \{-4; -1; 0\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$2(x^2 + 4x)(x+1)^2 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -4, \quad x = -1, \quad x = 0$$

Also gilt:

$$\boxed{\mathbb{L} = \{-4; -1; 0\}}$$

Aufgabe 3d: Löse die Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da eine ganzrationale Gleichung dritten Grades vorliegt, suchen wir zuerst eine Lösung. Danach verwenden wir das Horner-Schema, um den Grad der Gleichung zu verringern.

Alternativ könnte man an dieser Stelle auch eine Polynomdivision durchführen.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nullstelle erraten

Bei einer ganzrationalen Gleichung dritten Grades versuchen wir zuerst, eine Nullstelle zu finden.

Mögliche ganzzahlige Kandidaten sind die Teiler des Absolutgliedes 12:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

Wir testen $x = 2$:

$$\begin{aligned} 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 &= 8 - 12 - 8 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist

$$x_1 = 2$$

eine Lösung der Gleichung.

Merke

Wenn $x = 2$ eine Lösung der Gleichung ist, dann ist

$$x - 2$$

ein Faktor des Terms.

Mit dem Horner-Schema können wir nun herausfinden, welcher quadratische Faktor noch übrig bleibt.

3. Schritt: Horner-Schema anwenden

Die Koeffizienten des Terms

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

sind:

$$1 \quad -3 \quad -4 \quad 12$$

Da $x_1 = 2$ eine Nullstelle ist, verwenden wir im Horner-Schema die Zahl 2:

	1	-3	-4	12
		$2 \cdot 1 =$	$2 \cdot (-1) =$	$2 \cdot (-6) =$
		2	-2	-12
$x_1 = 2$	1	-1	-6	0

Damit erhält man unten die Koeffizienten der quadratischen Gleichung:

$$1x^2 - 1x - 6$$

Die restliche Gleichung lautet also:

$$1x^2 - 1x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Alternative: Polynomdivision

Alternativ zum Horner-Schema kann man auch eine Polynomdivision durchführen.

Da $x_1 = 2$ eine Nullstelle ist, teilen wir den Term

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

durch

$$x - 2$$

Die Polynomdivision lautet:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \quad : (x - 2) = x^2 - x - 6 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
 -x^2 - 4x \\
 \underline{-(-x^2 + 2x)} \\
 -6x + 12 \\
 \underline{-(-6x + 12)} \\
 0
 \end{array}$$

Da am Ende 0 übrig bleibt, ist die Polynomdivision aufgegangen.
Auch hier erhalten wir:

$$x^2 - x - 6$$

4. Schritt: Quadratische Gleichung erhalten

Durch das Horner-Schema haben wir den Term zerlegt:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

die Gleichung

$$(x - 2)(x^2 - x - 6) = 0$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x - 2 = 0$$

oder

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Die erste Gleichung liefert wieder:

$$x_1 = 2$$

Jetzt müssen wir noch die quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

5. Schritt: Quadratische Gleichung lösen

Die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel. Alternativ kann man auch die Mitternachtsformel verwenden.

Wir vergleichen mit

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -1 \quad \text{und} \quad q = -6$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-6)} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ x_3 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}x_{2,3} &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \\&= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\&= \frac{1 \pm 5}{2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1 - 5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\x_3 &= \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3\end{aligned}$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-2, 2, 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-2; 2; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -2, \quad x = 2, \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-2; 2; 3\}$$

Aufgabe 3e: Löse die Gleichung

Löse die Gleichung mit $x \in \mathbb{R}$ und gib die Lösungsmenge an.

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

Lösung

Gegeben ist die Gleichung

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

Die Gleichung ist bereits in der Form

$$\text{Term} = 0$$

gegeben. Sie ist außerdem klammerfrei, vollständig zusammengefasst und nach absteigenden Potenzen geordnet.

Da in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor x vorkommt, verwenden wir zuerst die Ausklammern-Methode. Danach wenden wir den Satz vom Nullprodukt an. Die entstehende quadratische Gleichung lösen wir anschließend mit der pq -Formel.

Alternativ zur pq -Formel kann man auch die Mitternachtsformel verwenden.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst prüfen wir, ob die Gleichung bereits vorbereitet ist.

Die Gleichung lautet:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

Die vier Merkmale sind erfüllt:

1. Die Gleichung steht in der Form $\text{Term} = 0$
2. Die Gleichung ist klammerfrei
3. Die Gleichung ist vollständig zusammengefasst
4. Die Gleichung ist nach absteigenden Potenzen geordnet

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: x ausklammern

Jetzt suchen wir den gemeinsamen Faktor der Summanden:

$$x^3 + 5x^2 + 6x$$

In jedem Summanden kommt ein x vor:

$$x^3 = x \cdot x^2$$

$$5x^2 = x \cdot 5x$$

$$6x = x \cdot 6$$

Deshalb klammern wir x aus:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = x(x^2 + 5x + 6)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

die Gleichung

$$x(x^2 + 5x + 6) = 0$$

Merke

Wenn in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor vorkommt, kann man diesen Faktor ausklammern. Hier ist der gemeinsame Faktor:

$$x$$

Dadurch entsteht eine Produktform. Dann kann man den Satz vom Nullprodukt anwenden.

3. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Jetzt liegt die Gleichung in Produktform vor:

$$x(x^2 + 5x + 6) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x = 0$$

oder

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Die erste Gleichung liefert direkt:

$$x_1 = 0$$

Jetzt müssen wir noch die quadratische Gleichung lösen:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel.

Wir vergleichen mit

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = 5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}x_{2,3} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \\&= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\&= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\&= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\&= -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}x_2 &= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \\x_3 &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} = -2\end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die quadratische Gleichung

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}x_{2,3} &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\&= \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \\&= \frac{-5 \pm 1}{2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-5 - 1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \\x_3 &= \frac{-5 + 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2\end{aligned}$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -2$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, -2, 0$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; -2; 0\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = -3, \quad x = -2, \quad x = 0$$

Also gilt:

$$L = \{-3; -2; 0\}$$

Aufgabe 4a: Berechne die Schnittpunkte

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

und

$$g(x) = 2x - 5$$

Berechne die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Lösung

Gesucht sind die Stellen, an denen beide Funktionen den gleichen Funktionswert haben.
Dafür setzen wir:

$$f(x) = g(x)$$

Also gilt:

$$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5$$

Diese Gleichung formen wir in die Form

$$\text{Term} = 0$$

um und lösen sie anschließend mit der pq -Formel.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$f(x) = g(x)$$

Also:

$$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5$$

Jetzt bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dazu bringen wir alle Terme auf die linke Seite:

$$x^2 - 3x + 1 = 2x - 5 \quad | + 5$$

$$x^2 - 3x + 6 = 2x \quad | - 2x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Diese Gleichung ist:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

2. Schritt: Wenn nötig normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Unsere Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Vor x^2 steht bereits der Faktor 1.

Die Gleichung ist also schon normiert. Wir müssen hier nichts mehr teilen.

Merke

Die pq -Formel darf man direkt anwenden, wenn die Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

hat.

Das bedeutet: Vor x^2 muss der Faktor 1 stehen.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{2; 3\}$$

Ergebnis

Die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

hat in den reellen Zahlen die Lösungen

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Damit schneiden sich die Funktionen bei den Stellen

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{2; 3\}$$

Aufgabe 4b: Berechne die Schnittpunkte

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 + 1$$

und

$$g(x) = -x^2 + 9$$

Berechne die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Lösung

Gesucht sind die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Eine Schnittstelle ist der x -Wert, an dem beide Funktionen den gleichen Funktionswert haben.

Dafür setzen wir:

$$f(x) = g(x)$$

Also gilt:

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

Diese Gleichung lösen wir nach x auf. Die gefundenen x -Werte sind die gesuchten Schnittstellen.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Schnittstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind nur die x -Werte.

Die y -Koordinaten der Schnittpunkte berechnen wir später nur als Zusatz. Für die eigentliche Aufgabe wäre das nicht nötig gewesen.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$f(x) = g(x)$$

Also:

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

Jetzt bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dazu bringen wir alle Terme auf die linke Seite:

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9 \quad | -9$$

$$x^2 - 8 = -x^2 \quad | +x^2$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$2x^2 - 8 = 0$$

Diese Gleichung ist:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,

2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

2. Schritt: Nach x^2 auflösen

Jetzt lösen wir die Gleichung nach x^2 auf.
Aus

$$2x^2 - 8 = 0$$

machen wir:

$$2x^2 - 8 = 0 \quad | + 8$$

$$2x^2 = 8 \quad | : 2$$

$$x^2 = 4$$

Damit haben wir die Gleichung auf die Form

$$x^2 = 4$$

gebracht.

Merke

Wenn du eine Gleichung der Form

$$x^2 = a$$

hast, musst du beim Wurzelziehen beide Lösungen beachten:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Das bedeutet: Es kann eine positive und eine negative Lösung geben.

3. Schritt: Beide Wurzeln beachten

Aus

$$x^2 = 4$$

ziehen wir die Wurzel.

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

Also erhalten wir zwei Schnittstellen:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Schnittstellen sind:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Die Lösungsmenge der Schnittstellen lautet daher:

$$L = \{-2; 2\}$$

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.
Gesucht waren nur die Schnittstellen, also die x -Werte:

$$x = -2 \quad \text{und} \quad x = 2$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Schnittpunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die gefundenen x -Werte in eine der beiden Funktionen ein. Wir verwenden hier:

$$g(x) = -x^2 + 9$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} g(-2) &= -(-2)^2 + 9 \\ &= -4 + 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Also wäre der erste Schnittpunkt:

$$S_1(-2 \mid 5)$$

Für $x_2 = 2$:

$$\begin{aligned} g(2) &= -(2)^2 + 9 \\ &= -4 + 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Also wäre der zweite Schnittpunkt:

$$S_2(2 \mid 5)$$

Ergebnis

Die gesuchten Schnittstellen sind:

$$\boxed{x = -2} \quad \text{und} \quad \boxed{x = 2}$$

Also gilt:

$$\boxed{L = \{-2; 2\}}$$

Zusatz: Die zugehörigen Schnittpunkte wären

$$S_1(-2 \mid 5) \quad \text{und} \quad S_2(2 \mid 5)$$

Aufgabe 4c: Berechne die Schnittpunkte

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^3 - 3x$$

und

$$g(x) = 6x$$

Berechne die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Lösung

Gesucht sind die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Eine Schnittstelle ist der x -Wert, an dem beide Funktionen den gleichen Funktionswert haben.

Dafür setzen wir:

$$f(x) = g(x)$$

Also gilt:

$$x^3 - 3x = 6x$$

Diese Gleichung bringen wir zuerst in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Danach klammern wir die kleinste Potenz aus und verwenden den Satz vom Nullprodukt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Schnittstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind nur die x -Werte.

Die y -Koordinaten der Schnittpunkte berechnen wir später nur als Zusatz. Für die eigentliche Aufgabe wäre das nicht nötig gewesen.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$f(x) = g(x)$$

Also:

$$x^3 - 3x = 6x$$

Jetzt bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dazu bringen wir alle Terme auf die linke Seite:

$$x^3 - 3x = 6x \quad | - 6x$$

$$x^3 - 9x = 0$$

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$x^3 - 9x = 0$$

Diese Gleichung ist:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

2. Schritt: Kleinste Potenz ausklammern

Jetzt suchen wir den gemeinsamen Faktor der beiden Summanden:

$$x^3 - 9x$$

In beiden Summanden kommt ein x vor:

$$x^3 = x \cdot x^2$$

und

$$-9x = x \cdot (-9)$$

Deshalb klammern wir x aus:

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$x^3 - 9x = 0$$

die Gleichung

$$x(x^2 - 9) = 0$$

Merke

Wenn in allen Summanden ein gemeinsamer Faktor vorkommt, kann man diesen Faktor ausklammern. Hier ist der gemeinsame Faktor:

$$x$$

Dadurch entsteht eine Produktform. Dann können wir den Satz vom Nullprodukt anwenden.

3. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Jetzt liegt die Gleichung in Produktform vor:

$$x(x^2 - 9) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x = 0$$

oder

$$x^2 - 9 = 0$$

Die erste Gleichung liefert direkt:

$$x_1 = 0$$

Jetzt lösen wir noch die zweite Gleichung:

$$x^2 - 9 = 0$$

4. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen

Die erste Gleichung ist:

$$x = 0$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 0$$

Die zweite Gleichung lautet:

$$x^2 - 9 = 0$$

Wir lösen nach x^2 auf:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \quad | +9 \\ x^2 &= 9 \end{aligned}$$

Jetzt ziehen wir die Wurzel und beachten beide Lösungen:

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \quad | \sqrt{} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = -3 \quad \text{und} \quad x_3 = 3$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Schnittstellen sind:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, 0, 3$$

Die Lösungsmenge der Schnittstellen lautet daher:

$$L = \{-3; 0; 3\}$$

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.
Gesucht waren nur die Schnittstellen, also die x -Werte:

$$x = -3, \quad x = 0, \quad x = 3$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Schnittpunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die gefundenen x -Werte in eine der beiden Funktionen ein. Wir verwenden hier:

$$g(x) = 6x$$

Für $x_1 = -3$:

$$\begin{aligned} g(-3) &= 6 \cdot (-3) \\ &= -18 \end{aligned}$$

Also wäre der erste Schnittpunkt:

$$S_1(-3 \mid -18)$$

Für $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= 6 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also wäre der zweite Schnittpunkt:

$$S_2(0 \mid 0)$$

Für $x_3 = 3$:

$$\begin{aligned} g(3) &= 6 \cdot 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Also wäre der dritte Schnittpunkt:

$$S_3(3 \mid 18)$$

Ergebnis

Die gesuchten Schnittstellen sind:

$$\boxed{x = -3} \quad \boxed{x = 0} \quad \boxed{x = 3}$$

Also gilt:

$$\boxed{L = \{-3; 0; 3\}}$$

Zusatz: Die zugehörigen Schnittpunkte wären

$$S_1(-3 \mid -18), \quad S_2(0 \mid 0), \quad S_3(3 \mid 18)$$

Aufgabe 4d: Berechne die Schnittpunkte

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = 2x^2 + x$$

und

$$g(x) = x^2 + 7x - 8$$

Berechne die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Lösung

Gesucht sind die Schnittstellen der beiden Funktionen.

Eine Schnittstelle ist der x -Wert, an dem beide Funktionen den gleichen Funktionswert haben.

Dafür setzen wir:

$$f(x) = g(x)$$

Also gilt:

$$2x^2 + x = x^2 + 7x - 8$$

Diese Gleichung formen wir in die Form

$$\text{Term} = 0$$

um und lösen sie anschließend mit der pq -Formel.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Schnittstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind nur die x -Werte.

Die y -Koordinaten der Schnittpunkte berechnen wir später nur als Zusatz. Für die eigentliche Aufgabe wäre das nicht nötig gewesen.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst setzen wir die beiden Funktionen gleich:

$$f(x) = g(x)$$

Also:

$$2x^2 + x = x^2 + 7x - 8$$

Jetzt bringen wir die Gleichung in die Form

$$\text{Term} = 0$$

Dazu bringen wir alle Terme auf die linke Seite:

$$2x^2 + x = x^2 + 7x - 8 \quad | -x^2$$

$$x^2 + x = 7x - 8 \quad | -7x$$

$$x^2 - 6x = -8 \quad | +8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Die vorbereitete Gleichung lautet also:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Diese Gleichung ist:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

2. Schritt: Wenn nötig normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Unsere Gleichung lautet:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Vor x^2 steht bereits der Faktor 1.

Die Gleichung ist also schon normiert. Wir müssen hier nichts mehr teilen.

Merke

Die pq -Formel darf man direkt anwenden, wenn die Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

hat.

Das bedeutet: Vor x^2 muss der Faktor 1 stehen.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die Gleichung lautet:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -6 \quad \text{und} \quad q = 8$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen

$$p = -6 \quad \text{und} \quad q = 8$$

ein:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8} \\&= 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8} \\&= 3 \pm \sqrt{9 - 8} \\&= 3 \pm \sqrt{1} \\&= 3 \pm 1\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$x_2 = 3 + 1 = 4$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 8$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \\&= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \\&= \frac{6 \pm 2}{2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Schnittstellen sind:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

Die Lösungsmenge der Schnittstellen lautet daher:

$$L = \{2; 4\}$$

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.
Gesucht waren nur die Schnittstellen, also die x -Werte:

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = 4$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Schnittpunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die gefundenen x -Werte in eine der beiden Funktionen ein. Wir verwenden hier:

$$f(x) = 2x^2 + x$$

Für $x_1 = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^2 + 2 \\ &= 2 \cdot 4 + 2 \\ &= 8 + 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Also wäre der erste Schnittpunkt:

$$S_1(2 \mid 10)$$

Für $x_2 = 4$:

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 \cdot 4^2 + 4 \\ &= 2 \cdot 16 + 4 \\ &= 32 + 4 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Also wäre der zweite Schnittpunkt:

$$S_2(4 \mid 36)$$

Ergebnis

Die gesuchten Schnittstellen sind:

$$\boxed{x = 2} \quad \text{und} \quad \boxed{x = 4}$$

Also gilt:

$$\boxed{L = \{2; 4\}}$$

Zusatz: Die zugehörigen Schnittpunkte wären

$$S_1(2 \mid 10) \quad \text{und} \quad S_2(4 \mid 36)$$

Aufgabe 5a: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Da nur x^4 , x^2 und eine reine Zahl vorkommen, liegt eine biquadratische Gleichung vor. Deshalb verwenden wir die Substitution

$$x^2 = z$$

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Kleinste Potenz = z

Bei der Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

kommen die Potenzen

$$x^4 \quad \text{und} \quad x^2$$

vor.

Dabei gilt:

$$x^4 = x^2 \cdot x^2$$

Deshalb setzen wir:

$$x^2 = z$$

Dann gilt automatisch:

$$x^4 = z^2$$

Damit wird aus der ursprünglichen Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

die neue Gleichung

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

Merke

Bei einer biquadratischen Gleichung ersetzt man meistens:

$$x^2 = z$$

Dann wird aus

$$x^4$$

der Ausdruck

$$z^2$$

So entsteht aus einer Gleichung mit x^4 eine quadratische Gleichung in z .

3. Schritt: Neue Gleichung lösen

Jetzt lösen wir die neue Gleichung:

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir mit der pq -Formel.

Wir vergleichen mit:

$$z^2 + pz + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -10 \quad \text{und} \quad q = 9$$

Die pq -Formel lautet:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 9} \\ &= 5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 9} \\ &= 5 \pm \sqrt{25 - 9} \\ &= 5 \pm \sqrt{16} \\ &= 5 \pm 4 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$z_1 = 5 - 4 = 1$$

$$z_2 = 5 + 4 = 9$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -10, \quad c = 9$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} \\ &= \frac{10 \pm 8}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{10 - 8}{2} = 1 \\ z_2 &= \frac{10 + 8}{2} = 9 \end{aligned}$$

4. Schritt: $z = \text{kleinste Potenz}$

Jetzt gehen wir zurück zur Substitution.

Wir hatten gesetzt:

$$x^2 = z$$

Also gilt für

$$z_1 = 1$$

die Gleichung:

$$x^2 = 1$$

Und für

$$z_2 = 9$$

die Gleichung:

$$x^2 = 9$$

5. Schritt: Wenn möglich Wurzel ziehen

Jetzt lösen wir beide Gleichungen.

Zuerst:

$$x^2 = 1$$

Wir ziehen die Wurzel und beachten beide Lösungen:

$$x^2 = 1 \quad |\sqrt{}$$

$$x = \pm 1$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

Nun:

$$x^2 = 9$$

Auch hier ziehen wir die Wurzel und beachten beide Lösungen:

$$x^2 = 9 \quad |\sqrt{}$$

$$x = \pm 3$$

Damit erhalten wir:

$$x_3 = -3 \quad \text{und} \quad x_4 = 3$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die vier Lösungen sind:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 3$$

Sortiert schreiben wir:

$$-3, -1, 1, 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; -1; 1; 3\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

hat die Nullstellen

$$x = -3, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-3; -1; 1; 3\}$$

Aufgabe 5b: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 5x^2 - 45$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$5x^2 - 45 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir nach x^2 auf. Danach ziehen wir die Wurzel und beachten beide Lösungen.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$5x^2 - 45 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form Term = 0,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nach x^2 auflösen

Jetzt lösen wir die Gleichung nach x^2 auf.

Aus

$$5x^2 - 45 = 0$$

machen wir:

$$5x^2 - 45 = 0 \quad | + 45$$

$$5x^2 = 45 \quad | : 5$$

$$x^2 = 9$$

Damit haben wir die Gleichung auf die Form

$$x^2 = 9$$

gebracht.

Merke

Wenn du eine Gleichung der Form

$$x^2 = a$$

hast, musst du beim Wurzelziehen beide Lösungen beachten:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Das bedeutet: Es kann eine positive und eine negative Lösung geben.

3. Schritt: Beide Wurzeln beachten

Aus

$$x^2 = 9$$

ziehen wir die Wurzel.

$$x^2 = 9 \quad |\sqrt{}$$

$$x = \pm 3$$

Also erhalten wir zwei Lösungen:

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

4. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-3; 3\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = 5x^2 - 45$$

hat die Nullstellen

$$x = -3 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-3; 3\}$$

Aufgabe 5c: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 3x^3 - 12x^2$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$3x^3 - 12x^2 = 0$$

Da in beiden Summanden die kleinste Potenz x^2 vorkommt, verwenden wir die Ausklammern-Methode. Danach wenden wir den Satz vom Nullprodukt an.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$3x^3 - 12x^2 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Kleinste Potenz ausklammern

Jetzt suchen wir die kleinste Potenz, die in beiden Summanden vorkommt:

$$3x^3 - 12x^2$$

In beiden Summanden kommt x^2 vor:

$$3x^3 = x^2 \cdot 3x$$

und

$$-12x^2 = x^2 \cdot (-12)$$

Deshalb klammern wir x^2 aus:

$$3x^3 - 12x^2 = x^2(3x - 12)$$

Damit wird aus der Gleichung

$$3x^3 - 12x^2 = 0$$

die Gleichung

$$x^2(3x - 12) = 0$$

Merke

Beim Ausklammern kann man sich zuerst auf die kleinste Potenz konzentrieren.
Hier ist die kleinste Potenz:

$$x^2$$

Dadurch entsteht eine Produktform. Dann können wir den Satz vom Nullprodukt anwenden.

3. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Jetzt liegt die Gleichung in Produktform vor:

$$x^2(3x - 12) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$$x^2 = 0$$

oder

$$3x - 12 = 0$$

Jetzt lösen wir beide Gleichungen einzeln.

4. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen

Die erste Gleichung lautet:

$$x^2 = 0$$

Wir lösen nach x auf:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 & | \sqrt{} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 0$$

Die zweite Gleichung lautet:

$$3x - 12 = 0$$

Wir lösen nach x auf:

$$\begin{aligned} 3x - 12 &= 0 & | +12 \\ 3x &= 12 & | :3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_2 = 4$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{0; 4\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = 3x^3 - 12x^2$$

hat die Nullstellen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = 4$$

Also gilt:

$$L = \{0; 4\}$$

Aufgabe 5d: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

Da es sich um eine Gleichung dritten Grades handelt, suchen wir zuerst eine Nullstelle durch Probieren. Danach verwenden wir das Horner-Schema.

1. Schritt: Gleichung vorbereiten

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form Term = 0,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Nullstelle erraten

Bei einer ganzrationalen Gleichung dritten Grades probieren wir zuerst mögliche ganzzahlige Nullstellen. Mögliche Kandidaten sind Teiler des Absolutglieds 6:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Wir testen $x = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + (-1) + 6 \\ &= -1 - 4 - 1 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist

$$x_1 = -1$$

eine Nullstelle.

3. Schritt: Horner-Schema anwenden

Jetzt verwenden wir das Horner-Schema mit

$$x_1 = -1$$

Die Koeffizienten der Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

sind:

$$1, -4, 1, 6$$

	1	-4	1	6
		$(-1) \cdot 1 =$	$(-1) \cdot (-5) =$	$(-1) \cdot 6 =$
		-1	5	-6
$x_1 = -1$	1	-5	6	0

Damit erhalten wir als neue Gleichung:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Alternative: Polynomdivision

Alternativ kann man auch eine Polynomdivision durchführen.

Da $x_1 = -1$ eine Nullstelle ist, teilen wir durch

$$x - (-1) = x + 1$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2 + x + 6 \\
 -(x^3 + x^2) \\
 \hline
 -5x^2 + x \\
 -(-5x^2 - 5x) \\
 \hline
 6x + 6 \\
 -(6x + 6) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad : (x + 1) = x^2 - 5x + 6$$

Auch hier erhalten wir:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

4. Schritt: Quadratische Gleichung erhalten

Nach dem Horner-Schema bleibt die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir jetzt mit der pq -Formel.

5. Schritt: Quadratische Gleichung lösen

Die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \\ x_3 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}x_{2,3} &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\&= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \\&= \frac{5 \pm 1}{2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{5 - 1}{2} = 2 \\x_3 &= \frac{5 + 1}{2} = 3\end{aligned}$$

6. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die drei Lösungen sind:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{-1; 2; 3\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

hat die Nullstellen

$$x = -1, \quad x = 2, \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{-1; 2; 3\}$$

Aufgabe 5e: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Da es sich um eine quadratische Gleichung handelt, lösen wir sie mit der pq -Formel. Dafür müssen wir die Gleichung zuerst normieren.

1. Schritt: Gleichung vereinfachen

Zuerst verwenden wir die Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0$$

Also gilt:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Die Gleichung ist bereits:

1. in der Form $\text{Term} = 0$,
2. klammerfrei,
3. vollständig zusammengefasst,
4. nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Vor-Vorarbeit ist also erledigt.

2. Schritt: Wenn nötig normieren

Für die pq -Formel brauchen wir eine quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Unsere Gleichung lautet:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Vor x^2 steht der Faktor 2. Deshalb teilen wir die gesamte Gleichung durch 2:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 10x + 12 = 0 & \quad | : 2 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{aligned}$$

Jetzt ist die Gleichung normiert.

Merke

Die pq -Formel darf man direkt anwenden, wenn die Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

hat.

Das bedeutet: Vor x^2 muss der Faktor 1 stehen.

3. Schritt: p und q bestimmen

Die normierte Gleichung lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

4. Schritt: pq -Formel anwenden

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen

$$p = -5 \quad \text{und} \quad q = 6$$

ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

gilt:

$$a = 2, \quad b = -10, \quad c = 12$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} \\ &= \frac{10 \pm 2}{4} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{10 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 &= \frac{10 + 2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

Die beiden Lösungen sind:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungsmenge lautet daher:

$$L = \{2; 3\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

hat die Nullstellen

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Also gilt:

$$L = \{2; 3\}$$

Aufgabe 5f: Berechne die Nullstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 6)$$

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Lösungsmenge an.

Lösung

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.

Nullstellen berechnet man mit der Bedingung

$$f(x) = 0$$

Also lösen wir die Gleichung

$$(x + 2)(x - 3)(x - 6) = 0$$

Die Gleichung liegt bereits in Produktform vor. Deshalb können wir direkt den Satz vom Nullprodukt anwenden.

1. Schritt: Produktform erkennen

Die Gleichung lautet:

$$(x + 2)(x - 3)(x - 6) = 0$$

Auf der linken Seite steht ein Produkt aus drei Faktoren:

$$(x + 2)$$

$$(x - 3)$$

$$(x - 6)$$

Damit liegt die Gleichung bereits in Produktform vor.

Merke

Wenn ein Produkt gleich 0 ist, dann muss mindestens ein Faktor gleich 0 sein.
Das ist der Satz vom Nullprodukt:

$$a \cdot b \cdot c = 0$$

Dann gilt:

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad b = 0 \quad \text{oder} \quad c = 0$$

2. Schritt: Satz vom Nullprodukt anwenden

Wir wenden den Satz vom Nullprodukt auf

$$(x + 2)(x - 3)(x - 6) = 0$$

an.

Also gilt:

$$x + 2 = 0$$

oder

$$x - 3 = 0$$

oder

$$x - 6 = 0$$

3. Schritt: Faktoren einzeln gleich 0 setzen

Die einzelnen Gleichungen lauten:

$$x + 2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x - 6 = 0$$

Jetzt lösen wir jede Gleichung einzeln.

4. Schritt: Einzelne Gleichungen lösen und Lösungsmenge angeben

Zuerst:

$$x + 2 = 0 \quad | - 2$$

$$x = -2$$

Dann:

$$x - 3 = 0 \quad | + 3$$

$$x = 3$$

Und:

$$x - 6 = 0 \quad | + 6$$

$$x = 6$$

Damit erhalten wir die drei Lösungen:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 6$$

Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \{-2; 3; 6\}$$

Ergebnis

Die Funktion

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)(x - 6)$$

hat die Nullstellen

$$x = -2, \quad x = 3, \quad x = 6$$

Also gilt:

$$L = \{-2; 3; 6\}$$

Aufgabe 6a: Berechne die Extremstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Berechne die Extremstellen der Funktion und gib sie an.

Lösung

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion.

Extremstellen berechnet man mit der notwendigen Bedingung

$$f'(x) = 0$$

Um anschließend zu prüfen, ob wirklich eine Extremstelle vorliegt, verwenden wir die hinreichende Bedingung

$$f''(x) \neq 0$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen von $f''(x)$, ob ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt vorliegt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Extremstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind zunächst nur die x -Werte der Extrempunkte.

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir später nur als Zusatz, damit wir die Extrempunkte vollständig angeben können.

1. Schritt: $f'(x)$ bilden

Die Funktion lautet:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Damit gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

2. Schritt: $f''(x)$ bilden

Jetzt bilden wir die zweite Ableitung.

Aus

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

wird:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Damit gilt:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Merke

Für Extremstellen gilt:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

Wenn

$$f''(x) < 0$$

liegt ein Hochpunkt vor.

Wenn

$$f''(x) > 0$$

liegt ein Tiefpunkt vor.

3. Schritt: Notwendige Bedingung anwenden

Die notwendige Bedingung lautet:

$$f'(x) = 0$$

Also setzen wir:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Jetzt lösen wir die Gleichung:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

lösen wir mit der pq -Formel.

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -4 \quad \text{und} \quad q = 3$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3}$$

$$= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3}$$

$$= 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$

$$= 2 \pm \sqrt{1}$$

$$= 2 \pm 1$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 2 - 1 = 1$$

$$x_2 = 2 + 1 = 3$$

Die möglichen Extremstellen liegen also bei:

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Auch mit der Mitternachtsformel erhalten wir also die möglichen Extremstellen:

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

4. Schritt: Hinreichende Bedingung anwenden

Die hinreichende Bedingung lautet:

$$f''(x) \neq 0$$

Wir prüfen die beiden möglichen Extremstellen mit

$$f''(x) = 6x - 12$$

Für $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} f''(1) &= 6 \cdot 1 - 12 \\ &= 6 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Da

$$f''(1) < 0$$

liegt bei

$$x = 1$$

ein Hochpunkt vor.

Für $x_2 = 3$:

$$\begin{aligned} f''(3) &= 6 \cdot 3 - 12 \\ &= 18 - 12 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Da

$$f''(3) > 0$$

liegt bei

$$x = 3$$

ein Tiefpunkt vor.

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.
Gesucht waren nur die Extremstellen, also die x -Werte:

$$x = 1 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Extrempunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die x -Werte in die Ausgangsfunktion ein:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Für $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 \\ &= 1 - 6 + 9 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Damit ist der Hochpunkt:

$$H(1 \mid 4)$$

Für $x_2 = 3$:

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 \\ &= 27 - 54 + 27 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist der Tiefpunkt:

$$T(3 \mid 0)$$

Ergebnis

Die gesuchten Extremstellen sind:

$$x = 1 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Zusatz: Die zugehörigen Extrempunkte sind:

$$H(1 \mid 4)$$

und

$$T(3 \mid 0)$$

Aufgabe 6b: Berechne die Extremstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$$

Berechne die Extremstellen der Funktion und gib sie an.

Lösung

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion.

Extremstellen berechnet man mit der notwendigen Bedingung

$$f'(x) = 0$$

Um anschließend zu prüfen, ob wirklich eine Extremstelle vorliegt, verwenden wir die hinreichende Bedingung

$$f''(x) \neq 0$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen von $f''(x)$, ob ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt vorliegt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Extremstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind zunächst nur die x -Werte der Extrempunkte.

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir später nur als Zusatz, damit wir die Extrempunkte vollständig angeben können.

1. Schritt: $f'(x)$ bilden

Die Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x \\ &= x^3 - 4x \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

2. Schritt: $f''(x)$ bilden

Jetzt bilden wir die zweite Ableitung.

Aus

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

wird:

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

Damit gilt:

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

Merke

Für Extremstellen gilt:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

Wenn

$$f''(x) < 0$$

liegt ein Hochpunkt vor.

Wenn

$$f''(x) > 0$$

liegt ein Tiefpunkt vor.

3. Schritt: Notwendige Bedingung anwenden

Die notwendige Bedingung lautet:

$$f'(x) = 0$$

Also setzen wir:

$$x^3 - 4x = 0$$

Jetzt lösen wir die Gleichung:

$$x^3 - 4x = 0$$

Wir klammern x aus:

$$x(x^2 - 4) = 0$$

Jetzt wenden wir den Satz vom Nullprodukt an:

$$x = 0$$

oder

$$x^2 - 4 = 0$$

Die zweite Gleichung lösen wir nach x auf:

$$x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$$

Die möglichen Extremstellen liegen also bei:

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2$$

4. Schritt: Hinreichende Bedingung anwenden

Die hinreichende Bedingung lautet:

$$f''(x) \neq 0$$

Wir prüfen die drei möglichen Extremstellen mit

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} f''(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 - 4 \\ &= 3 \cdot 4 - 4 \\ &= 12 - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Da

$$f''(-2) > 0$$

liegt bei

$$x = -2$$

ein Tiefpunkt vor.

Für $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} f''(0) &= 3 \cdot 0^2 - 4 \\ &= 0 - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Da

$$f''(0) < 0$$

liegt bei

$$x = 0$$

ein Hochpunkt vor.

Für $x_3 = 2$:

$$\begin{aligned} f''(2) &= 3 \cdot 2^2 - 4 \\ &= 3 \cdot 4 - 4 \\ &= 12 - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Da

$$f''(2) > 0$$

liegt bei

$$x = 2$$

ein Tiefpunkt vor.

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.
Gesucht waren nur die Extremstellen, also die x -Werte:

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Extrempunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die x -Werte in die Ausgangsfunktion ein:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4 + 1 \\ &= 4 - 8 + 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Damit ist der erste Tiefpunkt:

$$T_1(-2 \mid -3)$$

Für $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 \\ &= 0 - 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Damit ist der Hochpunkt:

$$H(0 \mid 1)$$

Für $x_3 = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4 + 1 \\ &= 4 - 8 + 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Damit ist der zweite Tiefpunkt:

$$T_2(2 \mid -3)$$

Ergebnis

Die gesuchten Extremstellen sind:

$$x = -2$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

Zusatz: Die zugehörigen Extrempunkte sind:

$$T_1(-2 \mid -3)$$

$$H(0 \mid 1)$$

$$T_2(2 \mid -3)$$

Aufgabe 6c: Berechne die Extremstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

Berechne die Extremstellen der Funktion und gib sie an.

Lösung

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion.

Extremstellen berechnet man mit der notwendigen Bedingung

$$f'(x) = 0$$

Um anschließend zu prüfen, ob wirklich eine Extremstelle vorliegt, verwenden wir die hinreichende Bedingung

$$f''(x) \neq 0$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen von $f''(x)$, ob ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt vorliegt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Extremstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind zunächst nur die x -Werte der Extrempunkte.

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir später nur als Zusatz, damit wir die Extrempunkte vollständig angeben können.

1. Schritt: $f'(x)$ bilden

Die Funktion lautet:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Damit gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

2. Schritt: $f''(x)$ bilden

Jetzt bilden wir die zweite Ableitung.

Aus

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

wird:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Damit gilt:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Merke

Für Extremstellen gilt:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

Wenn

$$f''(x) < 0$$

liegt ein Hochpunkt vor.

Wenn

$$f''(x) > 0$$

liegt ein Tiefpunkt vor.

3. Schritt: Notwendige Bedingung anwenden

Die notwendige Bedingung lautet:

$$f'(x) = 0$$

Also setzen wir:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

Jetzt lösen wir die Gleichung:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Die Gleichung

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

lösen wir mit der pq -Formel.

Wir vergleichen mit:

$$x^2 + px + q = 0$$

Also gilt:

$$p = -2 \quad \text{und} \quad q = -3$$

Die pq -Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir setzen ein:

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)}$$

$$= 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3}$$

$$= 1 \pm \sqrt{1 + 3}$$

$$= 1 \pm \sqrt{4}$$

$$= 1 \pm 2$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = 1 - 2 = -1$$

$$x_2 = 1 + 2 = 3$$

Die möglichen Extremstellen liegen also bei:

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

Alternative: Mitternachtsformel

Alternativ kann man die Gleichung

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

auch mit der Mitternachtsformel lösen.

Die Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für die Gleichung

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

gilt:

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -3$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Auch mit der Mitternachtsformel erhalten wir also die möglichen Extremstellen:

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

4. Schritt: Hinreichende Bedingung anwenden

Die hinreichende Bedingung lautet:

$$f''(x) \neq 0$$

Wir prüfen die beiden möglichen Extremstellen mit

$$f''(x) = 6x - 6$$

Für $x_1 = -1$:

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 6 \cdot (-1) - 6 \\ &= -6 - 6 \\ &= -12 \end{aligned}$$

Da

$$f''(-1) < 0$$

liegt bei

$$x = -1$$

ein Hochpunkt vor.

Für $x_2 = 3$:

$$\begin{aligned} f''(3) &= 6 \cdot 3 - 6 \\ &= 18 - 6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Da

$$f''(3) > 0$$

liegt bei

$$x = 3$$

ein Tiefpunkt vor.

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.
Gesucht waren nur die Extremstellen, also die x -Werte:

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Extrempunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.
Dazu setzen wir die x -Werte in die Ausgangsfunktion ein:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

Für $x_1 = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) \\ &= -1 - 3 + 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Damit ist der Hochpunkt:

$$H(-1 \mid 5)$$

Für $x_2 = 3$:

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 \\ &= 27 - 27 - 27 \\ &= -27 \end{aligned}$$

Damit ist der Tiefpunkt:

$$T(3 \mid -27)$$

Ergebnis

Die gesuchten Extremstellen sind:

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = 3$$

Zusatz: Die zugehörigen Extrempunkte sind:

$$H(-1 \mid 5)$$

und

$$T(3 \mid -27)$$

Aufgabe 6d: Berechne die Extremstellen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Berechne die Extremstellen der Funktion und gib sie an.

Lösung

Gesucht sind die Extremstellen der Funktion.

Extremstellen berechnet man mit der notwendigen Bedingung

$$f'(x) = 0$$

Um anschließend zu prüfen, ob wirklich eine Extremstelle vorliegt, verwenden wir die hinreichende Bedingung

$$f''(x) \neq 0$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen von $f''(x)$, ob ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt vorliegt.

Wichtiger Hinweis

In dieser Aufgabe sind nur die Extremstellen gesucht.

Das bedeutet: Gesucht sind zunächst nur die x -Werte der Extrempunkte.

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir später nur als Zusatz, damit wir die Extrempunkte vollständig angeben können.

1. Schritt: $f'(x)$ bilden

Die Funktion lautet:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Damit gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

2. Schritt: $f''(x)$ bilden

Jetzt bilden wir die zweite Ableitung.

Aus

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

wird:

$$f''(x) = 6x$$

Damit gilt:

$$f''(x) = 6x$$

Merke

Für Extremstellen gilt:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

Wenn

$$f''(x) < 0$$

liegt ein Hochpunkt vor.

Wenn

$$f''(x) > 0$$

liegt ein Tiefpunkt vor.

3. Schritt: Notwendige Bedingung anwenden

Die notwendige Bedingung lautet:

$$f'(x) = 0$$

Also setzen wir:

$$3x^2 - 12 = 0$$

Jetzt lösen wir die Gleichung:

$$3x^2 - 12 = 0 \quad | + 12$$

$$3x^2 = 12 \quad | : 3$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

Damit erhalten wir:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Die möglichen Extremstellen liegen also bei:

$$x = -2 \quad \text{und} \quad x = 2$$

4. Schritt: Hinreichende Bedingung anwenden

Die hinreichende Bedingung lautet:

$$f''(x) \neq 0$$

Wir prüfen die beiden möglichen Extremstellen mit

$$f''(x) = 6x$$

Für $x_1 = -2$:

$$f''(-2) = 6 \cdot (-2)$$

$$= -12$$

Da

$$f''(-2) < 0$$

liegt bei

$$x = -2$$

ein Hochpunkt vor.

Für $x_2 = 2$:

$$\begin{aligned} f''(2) &= 6 \cdot 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Da

$$f''(2) > 0$$

liegt bei

$$x = 2$$

ein Tiefpunkt vor.

Wichtiger Hinweis

Damit ist die eigentliche Aufgabe bereits gelöst.

Gesucht waren nur die Extremstellen, also die x -Werte:

$$x = -2 \quad \text{und} \quad x = 2$$

Die passenden y -Koordinaten berechnen wir jetzt nur noch als Zusatz.

Zusatz: y -Koordinaten berechnen

Für die Extrempunkte brauchen wir zusätzlich die passenden y -Werte.

Dazu setzen wir die x -Werte in die Ausgangsfunktion ein:

$$f(x) = x^3 - 12x$$

Für $x_1 = -2$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 12 \cdot (-2) \\ &= -8 + 24 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Damit ist der Hochpunkt:

$$H(-2 \mid 16)$$

Für $x_2 = 2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 12 \cdot 2 \\ &= 8 - 24 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Damit ist der Tiefpunkt:

$$T(2 \mid -16)$$

Ergebnis

Die gesuchten Extremstellen sind:

$$x = -2 \quad \text{und} \quad x = 2$$

Zusatz: Die zugehörigen Extrempunkte sind:

$$H(-2 \mid 16)$$

und

$$T(2 \mid -16)$$