

Lernzettel: Drei Integraltypen

Es gibt drei wichtige Integraltypen, die du unterscheiden solltest: **unbestimmtes Integral**, **bestimmtes Integral** und **uneigentliches Integral**. Sie sehen ähnlich aus, bedeuten aber etwas Unterschiedliches.

Überblick:

- **Unbestimmtes Integral** $\int f(x) dx$: Ergebnis ist eine **Stammfunktion** $F(x)$ mit $+C$.
- **Bestimmtes Integral** $\int_a^b f(x) dx$: Ergebnis ist eine **Zahl** (Flächenbilanz) durch $F(b) - F(a)$.
- **Uneigentliches Integral**: Mindestens eine Grenze ist $\pm\infty$ oder der Integrand ist an einer Stelle nicht definiert. Das Ergebnis wird über einen **Grenzwert** (Limes) bestimmt.

1. Unbestimmtes Integral $\int f(x) dx$

Definition: Eine Stammfunktion F von f erfüllt $F'(x) = f(x)$. Dann gilt

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Potenzregel (Stammfunktion), $n \neq -1$:

$$f(x) = c \cdot x^n \Rightarrow F(x) = \frac{c}{n+1} x^{n+1}$$

Spezialfälle:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

Schritte (Rezept):

1. Ausdruck als Summe/Differenz erkennen
2. Termweise integrieren (Konstanten als Faktoren vorziehen)
3. Passende Regel anwenden (Potenzregel, $\frac{1}{x}$, e^{ax})
4. $+C$ anhängen und ggf. durch Ableiten kontrollieren

Stolperfallen & Tipps:

- $+C$ nie vergessen
- Bei $\int \frac{1}{x} dx$ immer $\ln |x|$ (mit Betrag)
- Bei $\int e^{ax} dx$ den Faktor $\frac{1}{a}$ nicht übersehen
- Konstante k als Summand wird zu kx

Beispiel 1 – Polynom

Berechne $\int (2x^2 - 3x + 4) dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int (2x^2 - 3x + 4) dx &= \int (2x^2 - 3x^1 + 4) dx && \text{Exponenten markieren} \\ &= \frac{2}{2+1} x^{2+1} - \frac{3}{1+1} x^{1+1} + 4x + C && \text{Potenzregel anwenden} \\ &= \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x + C \\ &= \boxed{\frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x + C}\end{aligned}$$

Beispiel 2 – Mix mit e^x

Berechne $\int (3e^x - x^2 + 1) dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int (3e^x - x^2 + 1) dx &= \int (3e^x - x^2 + 1) dx && \text{Exponenten sind schon sichtbar} \\ &= 3e^x - \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 1 \cdot x + C && \text{Regeln anwenden} \\ &= 3e^x - \frac{1}{3} x^3 + x + C \\ &= \boxed{3e^x - \frac{1}{3} x^3 + x + C}\end{aligned}$$

Beispiel 3 – $\frac{1}{x}$ und e^{2x}

Berechne $\int \left(\frac{1}{x} + e^{2x} \right) dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{x} + e^{2x} \right) dx &= \int (x^{-1} + e^{2x}) dx && \frac{1}{x} \text{ als Potenz schreiben} \\ &= \int x^{-1} dx + \int e^{2x} dx && \text{aufteilen} \\ &= \ln |x| + \frac{1}{2} e^{2x} + C && \text{Regeln anwenden} \\ &= \boxed{\ln |x| + \frac{1}{2} e^{2x} + C}\end{aligned}$$

Hinweis:

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ – das ist ein *Sonderfall*, weil der Exponent -1 ist.

Für Exponentialfunktionen mit linearer Verkettung $c \cdot e^{mx+b}$ gilt allgemein:

$$\int c \cdot e^{mx+b} dx = c \cdot \frac{1}{m} e^{mx+b} + C$$

Im Beispiel ist c nicht vorhanden und $m = 2$, also:

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

2. Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x) dx$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$ ($F'(x) = f(x)$), dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Potenzregel (Stammfunktion), $n \neq -1$:

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Sonderfall: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

Schritte (Rezept):

1. **Stammfunktion bilden** $F(x)$ (ohne $+C$)
2. **Wenn nötig vereinfachen** $F(x)$
3. **„obere Grenze“ – „untere Grenze“:** $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$
4. **Ausrechnen und ggf. deuten**

Stolperfallen & Tipps:

- $\int f(x) dx$: das dx nicht vergessen
- Reihenfolge der Grenzen: $\int_a^b f = - \int_b^a f$
- Flächenbilanz $\neq$ Flächeninhalt (für Flächeninhalt ggf. $|f|$ stückweise integrieren)
- Einheit: y -Einheit $\cdot$ x -Einheit (z. B. LE^2)

Beispiel 1 – Lineare Funktion

Berechne $\int_0^3 (2x - 1) dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_0^3 (2x - 1) dx &= \int_0^3 (2x^1 - 1) dx && \text{Exponenten markieren} \\ &= \left(\frac{2}{1+1} x^{1+1} - 1 \cdot x \right) \Big|_0^3 && \text{Stammfunktion bilden} \\ &= (x^2 - x) \Big|_0^3 \\ &= (3^2 - 3) - (0^2 - 0) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“} \\ &= 9 - 3 - 0 \\ &= 6 \\ &= \boxed{6}\end{aligned}$$

Beispiel 2 – Quadratische Funktion

Berechne $\int_1^4 (x^2 - 3x + 2) dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_1^4 (x^2 - 3x + 2) dx &= \int_1^4 (x^2 - 3x^1 + 2) dx && \text{Exponenten markieren} \\ &= \left(\frac{1}{2+1} x^{2+1} - \frac{3}{1+1} x^{1+1} + 2x \right) \Big|_1^4 && \text{Stammfunktion bilden} \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_1^4 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) && \text{„obere“ – „untere“ Grenze} \\ &= \left(\frac{64}{3} - 24 + 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) \\ &= \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \frac{5}{6} \\ &= \frac{16}{3} - \frac{5}{6} \\ &= \frac{32 - 5}{6} \\ &= \frac{27}{6} \\ &= \frac{9}{2} \\ &= \boxed{\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

Beispiel 3 – Exponentialfunktion mit linearer Verkettung

Berechne $\int_0^1 2e^{-x+1} dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_0^1 2e^{-x+1} dx &= \int_0^1 2e^{(-1) \cdot x + 1} dx \\&= 2 \cdot \frac{1}{-1} e^{(-1) \cdot x + 1} \Big|_0^1 \\&= -2e^{-x+1} \Big|_0^1 \\&= (-2e^{-1+1}) - (-2e^{0+1}) \\&= (-2e^0) - (-2e^1) \\&= -2 \cdot 1 + 2e \\&= 2e - 2 \\&= \boxed{2e - 2}\end{aligned}$$

Exponenten als $-1 \cdot x + 1$

$$\text{Regel } \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

„obere Grenze“ – „untere Grenze“

3. Uneigentliches Integral

Wann uneigentlich?

- Mindestens eine Grenze ist $\pm\infty$, z. B. $\int_1^\infty f(x) dx$
- oder der Integrand ist an einer Grenze (oder im Inneren) nicht definiert (z. B. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, Problem bei $x = 0$).

Idee: Statt direkt zu integrieren, wird ein **Grenzwert** betrachtet, z. B.

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Nur wenn der Grenzwert endlich ist, *konvergiert* das Integral, sonst *divergiert* es.

Schritte (Rezept):

1. **Stammfunktion bilden** $F(x)$ von $f(x)$ (ohne $+C$)
2. **Limes einfügen**, z. B. $\int_1^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b$
3. **„obere Grenze“ – „untere Grenze“** innerhalb des Limes: $F(x) \Big|_{\text{unten}}^{\text{oben}}$
4. **Wenn möglich: Limes berechnen** $\Rightarrow$ Wert oder Divergenz entscheiden

Stolperfallen & Tipps:

- Immer zuerst klären, *wo* das Problem liegt (∞ -Grenze oder Polstelle)
- Ohne Limes ist $\int_1^\infty \dots dx$ nur eine Kurzschreibweise
- Typisch: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ konvergiert für $p > 1$, divergiert für $p \leq 1$
- Bei Problemstellen im Inneren (z. B. bei $x = 0$ zwischen -1 und 1) die Integrale *aufteilen*

Beispiel 1 – Unendliche obere Grenze (kleinschrittig, konvergent)

Berechne $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \int_1^{\infty} x^{-2} dx && \text{als Potenz schreiben} \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx && \text{Limes einführen} \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} \Big|_1^b \right) && \text{Potenzregel} \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-1} x^{-1} \Big|_1^b \right) \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) && \text{„obere“ – „untere“ Grenze} \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) \\&= 0 + 1 \\&= 1\end{aligned}$$

1 (Integral konvergiert)

Beispiel 2 – Uneigentliches Integral mit e-Funktion

Berechne $\int_2^{\infty} 2e^{-3x+6} dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} 2e^{-3x+6} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b 2e^{-3x+6} dx && \text{Limes einführen} \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \frac{1}{-3} e^{-3x+6} \Big|_2^b \right) && \text{Regel } \int e^{mx+b} dx = \frac{1}{m} e^{mx+b} \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3} e^{-3x+6} \Big|_2^b \right) \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3} e^{-3b+6} - \left(-\frac{2}{3} e^{-3 \cdot 2+6} \right) \right) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“} \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3} e^{-3b+6} + \frac{2}{3} e^0 \right) \\&= 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 \\&= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\int_2^{\infty} 2e^{-3x+6} dx = \frac{2}{3}$ (Integral konvergiert)

Beispiel 3 – Unendliche obere Grenze (divergent)

Berechne $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln |x| \Big|_1^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b \\ &= \infty\end{aligned}$$

Limes einführen

Sonderfall $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

„obere Grenze“ – „untere Grenze“

Integral divergiert (kein endlicher Wert)

Beispiel 4 – Unendliche untere Grenze (konvergent)

Berechne $\int_{-\infty}^1 4e^{x-1} dx$.

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^1 4e^{x-1} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 4e^{x-1} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(4 \cdot \frac{1}{1} \cdot e^{x-1} \Big|_a^1 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(4 \cdot e^{x-1} \Big|_a^1 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (4e^{1-1} - 4e^{a-1}) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (4 \cdot e^0 - 4e^{a-1}) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (4 - 4e^{a-1}) \\ &= 4 - 4 \cdot 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

Limes einführen

Regel $\int e^{x-1} dx = e^{x-1} + C$

„obere Grenze“ – „untere Grenze“

4 (Integral konvergiert)