

Grundlagen der Ableitung

Regeln kurz verstehen - in der Praxis sicher ableiten

DIE GRUNDIDEE

Die Ableitung $f'(x)$ beschreibt die Steigung.

Aus der Ausgangsfunktion $f(x)$ wird durch Ableiten eine neue Funktion $f'(x)$.

01 DIE IDEE AN KLEINEN BEISPIELEN

AUSGANGSFUNKTION	ABLEITUNG	WAS PASSIERT?	MERKSATZ
x^2	$2x$	Die Hochzahl 2 kommt nach vorn.	Exponent wird um 1 kleiner.
$4x$	4	$4x$ bedeutet $4 \cdot x$.	Die Zahl vor x bleibt übrig.
$-x$	-1	$-x$ bedeutet $-1 \cdot x$.	Die Zahl vor x bleibt übrig.
7	0	7 ist eine reine Zahl.	Eine reine Zahl wird zu 0.

02 EINE GANZE FUNKTION

1 Direkt von links nach rechts ableiten

Plus und Minus trennen die einzelnen Terme.

$f(x)=3x^4-2x+5$

$f'(x)=3\cdot 4x^3-2+0$

$f'(x)=12x^3-2$

MERKE

Bei x -Potenzen: Hochzahl nach vorn und oben 1 abziehen. Bei Zahl $\cdot x$ bleibt die Zahl übrig. Reine Zahlen werden 0.

Die vier Regeln auf einen Blick

Einfache Sätze und viele direkte Beispiele

03 REGELN

1 POTENZ- UND FAKTORREGEL

Bei Zahl $\cdot x^{\text{Hochzahl}}$: Hochzahl mit der Zahl davor multiplizieren und die Hochzahl um 1 verkleinern.

$$x^5 \rightarrow 5x^4$$

$$4x^3 \rightarrow 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$$

$$-2x^4 \rightarrow -2 \cdot 4x^3 = -8x^3$$

2 SUMMEN- UND DIFFERENZREGEL

Alles, was durch + oder - getrennt ist, wird innerhalb derselben Zeile einzeln abgeleitet.

$$3x^4 - 2x^2 + 5x - 7 \rightarrow 12x^3 - 4x + 5$$

3 ZAHL MAL x

Bei Zahl $\cdot x$ bleibt nach dem Ableiten genau die Zahl übrig, die vor x steht.

$$x = 1 \cdot x \rightarrow 1$$

$$-x = -1 \cdot x \rightarrow -1$$

$$7x \rightarrow 7$$

$$-4x \rightarrow -4$$

4 KONSTANTENREGEL

Eine reine Zahl ohne x wird beim Ableiten immer zu 0.

$$8 \rightarrow 0$$

$$-3 \rightarrow 0$$

$$1/2 \rightarrow 0$$

KLAMMERPRODUKT: AUSMULTIPLIZIEREN IST OFT AM EINFACHSTEN

Beispiel: $f(x) = x^2 \cdot (x+1)$. Zuerst ausmultiplizieren: $f(x) = x^3 + x^2$. Danach normal ableiten: $f'(x) = 3x^2 + 2x$. Später kannst du dieselbe Aufgabe auch mit der Produktregel lösen.

Die Praxis: So leitest du wirklich ab

Die Funktion bleibt in einer Zeile - du arbeitest direkt von links nach rechts

DEIN WICHTIGSTER PRAXISSATZ

Alles, was durch + oder - getrennt ist, wird einzeln abgeleitet. Du schreibst die Terme aber nicht erst einzeln heraus, sondern direkt die vollständige Ableitungszeile.

05 DAS SCHEMA AUS DEINER NOTIZ

Vorzahl · x^{Hochzahl}

ABLEITEN



Vorzahl · Hochzahl · x^(Hochzahl - 1)

BEISPIEL

$$3 \cdot x^5$$

ABLEITEN



$$3 \cdot 5 \cdot x^4 = 15x^4$$

$$x = 1 \cdot x$$

ABLEITEN



$$1$$

$$-x = -1 \cdot x$$

ABLEITEN



$$-1$$

Bei Zahl · x bleibt nach dem Ableiten genau die Zahl vor x übrig.

06 GANZE FUNKTION DIREKT ABLEITEN

1

Von f(x) direkt zu f'(x)

Keine künstliche Termliste - alles bleibt in einer Zeile

$$f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7$$

↓ ABLEITEN

$$f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 1x^0 - 0$$

$$f'(x) = 20x^4 - 9x^2 + 2$$

MERKE

Die Trennung an + und - geschieht beim Hinschauen. Im Rechenweg reicht normalerweise die Ausgangsfunktion, die direkte Ableitungszeile und das vereinfachte Ergebnis.

Praxis-Tabelle 1: Potenzfunktionen

Von der Ausgangsfunktion bis zum fertigen Ergebnis

07 EINFACHE POTENZEN, LINEARE TERME UND ZAHLEN

1 AUSGANGSFUNKTION	2 UMFORMUNG VORAB	3 ABLEITUNG	4 UMFORMEN / ERGEBNIS
$f(x)=x^5$	nicht nötig	$f'(x)=5x^4$	fertig
$f(x)=3x^4$	nicht nötig	$f'(x)=3\cdot 4x^3$	$f'(x)=12x^3$
$f(x)=-2x^3$	nicht nötig	$f'(x)=(-2)\cdot 3x^2$	$f'(x)=-6x^2$
$f(x)=0,5x^6$	nicht nötig	$f'(x)=0,5\cdot 6x^5$	$f'(x)=3x^5$
$f(x)=7x$	optional: $x=x^1$	$f'(x)=7\cdot 1x^0$	$f'(x)=7$
$f(x)=-4$	Konstante; keine Umformung nötig	$f'(x)=0$	fertig

WAS PASSIERT IN SPALTE 3?

Vorzahl · Hochzahl; der Exponent wird um 1 kleiner. Bei x ist die unsichtbare Hochzahl 1. Eine reine Zahl wird direkt zu 0.

Praxis-Tabelle 2: Ganzrationale Funktionen

Nicht vorher zerlegen - direkt in einer Zeile ableiten

08 POLYNOME

1 AUSGANGSFUNKTION	2 UMFORMUNG VORAB	3 ABLEITUNG	4 UMFORMEN / ERGEBNIS
$f(x)=3x^5-4x^2+9$	nicht nötig Direkt ableiten.	$f'(x)=3\cdot 5x^4-4\cdot 2x+0$	$f'(x)=15x^4-8x$
$g(x)=-2x^4+0,5x^3-6x+1$	nicht nötig Direkt ableiten.	$g'(x)=-2\cdot 4x^3+0,5\cdot 3x^2-6\cdot 1x^0+0$	$g'(x)=-8x^3+1,5x^2-6$
$h(x)=x^6-3x^3+x$	nicht nötig Direkt ableiten.	$h'(x)=6x^5-3\cdot 3x^2+1$	$h'(x)=6x^5-9x^2+1$
$u(x)=4x^3+2x^2-5x$	nicht nötig Direkt ableiten.	$u'(x)=4\cdot 3x^2+2\cdot 2x-5$	$u'(x)=12x^2+4x-5$
$v(x)=-x^5+x^2-8$	optional: $-x^5=-1\cdot x^5$	$v'(x)=-5x^4+2x-0$	$v'(x)=-5x^4+2x$

SO SIEHT EIN NORMALER RECHENWEG AUS

$f(x)=3x^5-4x^2+9 \rightarrow f'(x)=3\cdot 5x^4-4\cdot 2x+0=15x^4-8x$. Du brauchst keine zusätzliche Liste der einzelnen Terme.

Praxis-Tabelle 3: Einfache Brüche

Nenner als negative Potenz schreiben - dann normal ableiten

UMFORMUNGSREGEL

$$a/x^m = a \cdot x^{-m}$$

Die Zahl im Zähler bleibt vorn. Der Exponent aus dem Nenner bekommt beim Umschreiben ein Minuszeichen.

09 BRUCHTERME

1 AUSGANGSFUNKTION	2 UMFORMUNG VORAB	3 ABLEITUNG	4 UMFORMEN / ERGEBNIS
$f(x)=1/x^3$	$f(x)=x^{-3}$	$f'(x)=-3x^{-4}$	$f'(x)=-3/x^4$
$g(x)=5/x^2$	$g(x)=5x^{-2}$	$g'(x)=5 \cdot (-2)x^{-3}$	$g'(x)=-10/x^3$
$h(x)=-4/x$	$h(x)=-4x^{-1}$	$h'(x)=(-4) \cdot (-1)x^{-2}$	$h'(x)=4/x^2$
$u(x)=6/x^2-3/x^4+2$	$u(x)=6x^{-2}-3x^{-4}+2$	$u'(x)=-12x^{-3}+12x^{-5}+0$	$u'(x)=-12/x^3+12/x^5$
$v(x)=2x^3+3/x^2$	$v(x)=2x^3+3x^{-2}$	$v'(x)=6x^2-6x^{-3}$	$v'(x)=6x^2-6/x^3$

DEFINITIONSBEREICH

Bei allen Bruchtermen dieser Seite gilt $x \neq 0$. Das gilt sowohl vor als auch nach dem Ableiten.

Praxis-Tabelle 4: Wurzeln

Wurzel als Potenz mit Bruch-Exponent schreiben

UMFORMUNGSREGEL

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Wurzelexponent in den Nenner, Potenz unter der Wurzel in den Zähler. Bei $\sqrt{x}$ gilt: $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

10 WURZELTERME

1 AUSGANGSFUNKTION	2 UMFORMUNG VORAB	3 ABLEITUNG	4 UMFORMEN / ERGEBNIS
$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = x^{1/2}$	$f'(x) = 1/2 \cdot x^{-1/2}$	$f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$
$g(x) = 4\sqrt{x}$	$g(x) = 4x^{1/2}$	$g'(x) = 4 \cdot 1/2 \cdot x^{-1/2}$	$g'(x) = 2/\sqrt{x}$
$h(x) = \sqrt[3]{x}$	$h(x) = x^{1/3}$	$h'(x) = 1/3 \cdot x^{-2/3}$	$h'(x) = 1/(3 \cdot \sqrt[3]{x^2})$
$u(x) = \sqrt{x^3}$	$u(x) = x^{3/2}$	$u'(x) = 3/2 \cdot x^{1/2}$	$u'(x) = 3/2 \cdot \sqrt{x}$
$v(x) = 2x^3 - 6\sqrt{x}$	$v(x) = 2x^3 - 6x^{1/2}$	$v'(x) = 6x^2 - 3x^{-1/2}$	$v'(x) = 6x^2 - 3/\sqrt{x}$

ACHTUNG BEI x=0

$\sqrt{x}$ ist bei $x=0$ definiert, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ aber nicht. Der Definitionsbereich der Ableitung kann kleiner sein.

Praxis-Tabelle 5: Kombinationen

Nur Bruch- und Wurzelteile umformen - dann die ganze Zeile ableiten

11 GEMISCHTE FUNKTIONEN

1 AUSGANGSFUNKTION	2 UMFORMUNG VORAB	3 ABLEITUNG	4 UMFORMEN / ERGEBNIS
$f(x)=2x^4-3\sqrt{x}+5/x^2-7$	$f(x)=2x^4-3x^{1/2}+5x^{-2}-7$	$f'(x)=8x^3-3/2x^{-1/2}-10x^{-3}-0$	$f'(x)=8x^3-3/(2\sqrt{x})-10/x^3$
$g(x)=4x^3+2/x-5$	$g(x)=4x^3+2x^{-1}-5$	$g'(x)=12x^2-2x^{-2}-0$	$g'(x)=12x^2-2/x^2$
$h(x)=3\sqrt{x}-6/x^3$	$h(x)=3x^{1/2}-6x^{-3}$	$h'(x)=3/2x^{-1/2}+18x^{-4}$	$h'(x)=3/(2\sqrt{x})+18/x^4$
$u(x)=-x^5+4\cdot^3\sqrt{x}+3/x^2+1$	$u(x)=-x^5+4x^{1/3}+3x^{-2}+1$	$u'(x)=-5x^4+4/3x^{-2/3}-6x^{-3}+0$	$u'(x)=-5x^4+4/(3\cdot^3\sqrt{x^2})-6/x^3$

DIE RICHTIGE REIHENFOLGE

1. Nur Brüche und Wurzeln umschreiben. 2. Ganze Funktion direkt ableiten. 3. Faktoren ausrechnen. 4. Negative Exponenten zurück als Brüche schreiben.

Beispiel 1: Direkt in einer Zeile ableiten

Ganzrationale Funktion - so sieht der übliche Rechenweg aus

AUFGABE

$$f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7$$

Bilde die erste Ableitung.

12 RECHENWEG

1

Umformung prüfen

Hier ist vor dem Ableiten keine Umformung nötig.

$$f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7$$

Alle Terme sind Potenz-, lineare oder konstante Terme.

Wir gehen direkt zur Ableitung über.

2

Direkt ableiten und vereinfachen

Die Plus- und Minuszeichen trennen die Terme beim Hinschauen.

$$f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 7$$

↓ ABLEITEN

$$f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 1x^0 - 0$$

$$f'(x) = 20x^4 - 9x^2 + 2$$

Die 0 entfällt und x^0 wird zu 1.

ACHTE BESONDERS AUF x UND $-x$

In einer längeren Funktion gilt genauso: $+x$ wird beim Ableiten zu $+1$, $-x$ wird zu -1 . Beispiele: $g(x) = 2x^4 + x - 6 \rightarrow g'(x) = 8x^3 + 1$ und $h(x) = -3x^2 - x + 5 \rightarrow h'(x) = -6x - 1$.

Beispiel 2: Bruch und Wurzel kombiniert

Erst gezielt umformen - danach wieder direkt in einer Zeile ableiten

AUFGABE

$$f(x) = 2x^4 - 3\sqrt{x} + 5/x^2 - 7$$

Bilde die erste Ableitung.

13 RECHENWEG

1

Nur das Nötige umformen

Polynomterm und Zahl bleiben; Wurzel und Bruch werden Potenzen.

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \text{ und } 1/x^2 = x^{-2}$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^{1/2} + 5x^{-2} - 7$$

Jetzt besteht die ganze Funktion aus Potenztermen und einer Zahl.

2

Direkt ableiten und zurückformen

Ein durchgehender Rechenweg ohne Termliste

$$f'(x) = 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} + 5 \cdot (-2)x^{-3} - 0$$

$$f'(x) = 8x^3 - 3/2x^{-1/2} - 10x^{-3}$$

$$f'(x) = 8x^3 - 3/(2\sqrt{x}) - 10/x^3$$

Für f und f' gilt hier $x > 0$.

ENTSCHEIDUNGSHILFE

Siehst du nur x -Potenzen und Zahlen? Direkt ableiten. Siehst du x im Nenner oder unter einer Wurzel? Diese Teile zuerst umformen.

Typische Aufgabentypen in der Schule

Ableitung bilden, Steigung bestimmen und Tangente aufstellen

BEISPIELFUNKTION

$$f(x) = x^3 - 3x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

Mit dieser Funktion lösen wir die häufigsten Anwendungen.

14 ANWENDUNGEN

1

Ableitungsfunktion

Aufgabe: „Bilde $f'(x)$.“

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

2

Steigung bei $x_0=2$

Erst ableiten, dann einsetzen.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$$

Die Steigung ist $m=9$.

3

Tangente bei $x_0=2$

Steigung und Punkt werden gebraucht.

$$m = f'(2) = 9$$

$$y_0 = f(2) = 2$$

$$t: y = m(x - x_0) + y_0$$

$$t: y = 9(x - 2) + 2$$

$$t: y = 9x - 16$$

4

Waagerechte Tangente

Waagerecht bedeutet Steigung 0.

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ oder } x = 1$$

MERKE

$f'(x)$ ist die Ableitungsfunktion. $f'(x_0)$ ist eine konkrete Steigung. Eine waagerechte Tangente findest du mit $f'(x)=0$.

Typische Fehler sicher verbessern

Fehler erkennen - richtige Ableitung direkt daneben sehen

15 FEHLER VERMEIDEN

FEHLER	WAS PASSIERTE?	RICHTIG	MERKHILFE
$x^5 \rightarrow x^4$	Faktor 5 fehlt	$x^5 \rightarrow 5x^4$	Exponent nach vorne
$3x^4 \rightarrow 12x^4$	Exponent blieb gleich	$3x^4 \rightarrow 12x^3$	oben minus 1
$-2x^3 \rightarrow 6x^2$	Minus verloren	$-2x^3 \rightarrow -6x^2$	Vorzeichen mitnehmen
$7 \rightarrow 7$	Konstante nicht abgeleitet	$7 \rightarrow 0$	reine Zahl fällt weg
$1/x^2$ direkt	Umformung fehlt	$x^{-2} \rightarrow -2x^{-3}$	erst Potenzform

16 NOCH MEHR DIREKTE BEISPIELE

1 AUSGANGSFUNKTION	2 UMFORMUNG VORAB	3 ABLEITUNG	4 UMFORMEN / ERGEBNIS
$f(x)=x^6$	nicht nötig	$f'(x)=6x^5$	fertig
$g(x)=-x^3+4x-9$	nicht nötig	$g'(x)=-3x^2+4-0$	$g'(x)=-3x^2+4$
$h(x)=3/x^2$	$h(x)=3x^{-2}$	$h'(x)=-6x^{-3}$	$h'(x)=-6/x^3$

Übungen: Funktionen direkt ableiten

Nutze die Tabellen als Vorlage - schreibe keine unnötige Termliste

17 AUFGABEN

1 Potenz

Leite ab: $f(x)=7x^6$

2 Polynom

Leite ab: $g(x)=3x^5-4x^2+9$

3 Vorzeichen

Leite ab: $h(x)=-2x^4+0,5x^3-6x+1$

4 Linear und konstant

Leite ab: $u(x)=5-3x$

5 Bruch

Forme um und leite ab: $v(x)=8/x^3-2/x$

6 Wurzel

Forme um und leite ab: $w(x)=6\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[3]{x}$

7 Kombination

Leite ab: $r(x)=2x^3-4\sqrt{x}+3/x^2$

8 Kombination

Leite ab: $s(x)=-x^4+5/x-2\sqrt{x}+7$

ARBEITSAUFTRAG

Notiere bei Aufgabe 5 bis 8 zuerst die nötige Umformung. Leite anschließend die gesamte Funktion direkt in einer Zeile ab.

Lösungen: Funktionen direkt ableiten

Die vier Spalten zeigen den vollständigen, aber knappen Rechenweg

18 LÖSUNGEN

1 AUSGANGSFUNKTION	2 UMFORMUNG VORAB	3 ABLEITUNG	4 UMFORMEN / ERGEBNIS
1 $f(x)=7x^6$	nicht nötig	$f'(x)=7 \cdot 6x^5$	$f'(x)=42x^5$
2 $g(x)=3x^5-4x^2+9$	nicht nötig	$g'(x)=3 \cdot 5x^4-4 \cdot 2x+0$	$g'(x)=15x^4-8x$
3 $h(x)=-2x^4+0,5x^3-6x+1$	nicht nötig	$h'(x)=-8x^3+1,5x^2-6+0$	$h'(x)=-8x^3+1,5x^2-6$
4 $u(x)=5-3x$	nicht nötig	$u'(x)=0-3$	$u'(x)=-3$
5 $v(x)=8/x^3-2/x$	$v(x)=8x^{-3}-2x^{-1}$	$v'(x)=-24x^{-4}+2x^{-2}$	$v'(x)=-24/x^4+2/x^2$
6 $w(x)=6\sqrt{x}+2\cdot 3\sqrt{x}$	$w(x)=6x^{1/2}+2x^{3/2}$	$w'(x)=3x^{-1/2}+2/3x^{-2/2}$	$w'(x)=3/\sqrt{x}+2/(3\cdot 3\sqrt{(x^2)})$
7 $r(x)=2x^3-4\sqrt{x}+3/x^2$	$r(x)=2x^3-4x^{1/2}+3x^{-2}$	$r'(x)=6x^2-2x^{-1/2}-6x^{-3}$	$r'(x)=6x^2-2/\sqrt{x}-6/x^3$
8 $s(x)=-x^4+5/x-2\sqrt{x}+7$	$s(x)=-x^4+5x^{-1}-2x^{1/2}+7$	$s'(x)=-4x^3-5x^{-2}-x^{-1/2}+0$	$s'(x)=-4x^3-5/x^2-1/\sqrt{x}$

VERGLEICHE RICHTIG

Wenn dein Ergebnis anders aussieht, prüfe zuerst, ob nur eine andere Schreibweise verwendet wurde: x^{-3} und $1/x^3$ bedeuten dasselbe.

Übungen: Steigung und Tangente

Typische Anwendungen der ersten Ableitung

19 AUFGABEN

1 Steigung berechnen

Gegeben ist $f(x)=x^3-3x$. Bestimme die Steigung bei $x_0=2$.

2 Tangente aufstellen

Gegeben ist $f(x)=x^3-3x$. Stelle die Tangente bei $x_0=2$ auf.

3 Waagerechte Tangenten

Bestimme die Stellen mit waagerechter Tangente für $f(x)=x^3-3x$.

4 Vorgegebene Steigung

Für $f(x)=x^2-4x$ soll die Tangente die Steigung $m=2$ haben. Bestimme die Stelle x .

5 Wurzelfunktion

Gegeben ist $g(x)=4\sqrt{x}$. Bestimme $g'(x)$ und die Steigung bei $x_0=4$.

6 Bruchfunktion

Gegeben ist $h(x)=6/x^2$. Bestimme $h'(x)$ und die Steigung bei $x_0=2$.

ENTSCHEIDUNGSFRAGE

Ist eine konkrete Steigung gesucht? Erst $f'(x)$ bilden, dann x_0 einsetzen. Ist die Stelle zu einer Steigung gesucht? Gleichung $f'(x)=m$ lösen.

Lösungen: Steigung und Tangente

Mit Rechenweg und passender Begründung

20 LÖSUNGEN

1 Steigung

$$f(x) = 3x^2 - 3$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$$

Die Steigung beträgt $m=9$.

2 Tangente

$$m = f'(2) = 9; y_0 = f(2) = 9$$

$$t: y = m(x - x_0) + y_0$$

$$t: y = 9(x - 2) + 9$$

$$t: y = 9x - 9$$

3 Waagerechte Tangenten

$$f(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ oder } x = 1$$

4 Vorgegebene Steigung

$$f(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 2 \text{ setzen:}$$

$$2x - 4 = 2 \rightarrow 2x = 6$$

$$x = 3$$

5 Wurzelfunktion

$$g(x) = 4x^{1/2}$$

$$g'(x) = 2x^{-1/2} = 2/\sqrt{x}$$

$$g'(4) = 2/\sqrt{4} = 1$$

6 Bruchfunktion

$$h(x) = 6x^{-2}$$

$$h'(x) = -12x^{-3} = -12/x^3$$

$$h'(2) = -12/8 = -1,5$$

DEIN CHECK VOR DER ABGABE

1. Nur wenn nötig umgeformt? 2. Ganze Funktion direkt abgeleitet? 3. Vorzeichen und Exponenten geprüft? 4. Ergebnis vereinfacht?