

Nullstellen mit Substitution

Aus einer Gleichung mit hohen Potenzen wird eine quadratische Gleichung.

DEINE GRUNDIDEE

Ersetzen → quadratisch lösen → zurück zu x.

Substituieren bedeutet: Du ersetzt einen Ausdruck durch einen neuen Buchstaben.

Eine **Nullstelle** ist ein x-Wert, für den $f(x) = 0$ gilt. Dort liegt der Graph auf der x-Achse. Wir suchen in diesem Lernzettel **reelle Nullstellen**.

01 Woran erkennst du die passende Form?

Schau dir die **Exponenten** an: In der typischen Form kommen zwei verschiedene x-Potenzen vor. Der größere Exponent ist **doppelt so groß** wie der kleinere. Eine reine Zahl darf zusätzlich vorkommen.

$$a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$$

Du setzt $z = x^n$. Dabei gilt $a \neq 0$;
n ist hier eine ganze Zahl ab 2.

Potenzen in der Gleichung	Deine Ersetzung	Die höhere Potenz wird zu
x^4 und x^2	$z = x^2$	$x^4 = (x^2)^2 = z^2$
x^6 und x^3	$z = x^3$	$x^6 = (x^3)^2 = z^2$
x^8 und x^4	$z = x^4$	$x^8 = (x^4)^2 = z^2$

DER HÄUFIGSTE FALL: BIQUADRATISCHE GLEICHUNGEN

Bei $ax^4 + bx^2 + c = 0$ setzt du $z = x^2$. Dann wird daraus $az^2 + bz + c = 0$. **Zahlen und Vorzeichen bleiben erhalten.**

02 Nur gerade Exponenten reichen nicht aus

Bei $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$ entstehen mit $z = x^2$ die Terme $z^3 + z^2 + z + 1$. Die neue Gleichung ist **nicht quadratisch**. Der Schritteplan mit der pq-Formel passt deshalb hier nicht direkt.

Dein Weg durch den Lernzettel: Schritteplan auf Seite 2 · Beispiel 1 auf Seite 3-4 · Beispiel 2 auf Seite 5-6 · Beispiel 3 auf Seite 7-8.

Dein Schritteplan

Diese fünf Schritte führst du bei jeder passenden Aufgabe in derselben Reihenfolge aus.

1 $f(x) = 0$ bilden

Setze den **Funktionsterm gleich 0**. Gesucht sind x-Werte mit Funktionswert 0.

2 Die kleinste x-Potenz durch z ersetzen

Ersetze die kleinere x-Potenz durch z und die höhere durch z^2 . Das klappt hier, weil ihr Exponent doppelt so groß ist. Eine **reine Zahl bleibt stehen**.

$$z = x^2 \implies x^4 = (x^2)^2 = z^2$$

Nicht nur den Buchstaben x ersetzen, sondern den ganzen Ausdruck x^2 .

3 Die neue quadratische Gleichung lösen

Zum Beispiel mit der **pq-Formel**. Dafür muss vor z^2 eine 1 stehen. Falls nötig, teilst du **alle Terme** durch die Zahl vor z^2 (normieren).

$$z^2 + pz + q = 0$$

Lies p und q mit ihren Vorzeichen ab.
Alternativ geht die Mitternachtsformel.

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

4 Resubstituieren: von z zurück zu x

Setze für z wieder den ursprünglichen Ausdruck ein. Bei $z = x^2$ wird aus jedem gefundenen z-Wert eine Gleichung der Form $x^2 = \dots$ **Bearbeite jeden z-Wert einzeln**.

5 Wenn möglich die entsprechende Wurzel ziehen

Welche Wurzel du brauchst, hängt von deiner Ersetzung ab. Bei $z = x^2$ löst du eine quadratische Gleichung durch Wurzelziehen:

z-Wert positiv	$x^2 = 4 \implies x = \pm 2$	zwei reelle Lösungen
z-Wert ist 0	$x^2 = 0 \implies x = 0$	eine reelle Lösung
z-Wert negativ	$x^2 = -4$	keine reelle Lösung

Bei $z = x^3$: Ziehe die **dritte Wurzel**. Auch negative z-Werte sind erlaubt. Es gibt pro z-Wert genau einen reellen x-Wert, **kein $\pm$** (Beispiel 3).

Zum Schluss: Schreibe die x-Werte als Nullstellen auf und prüfe sie durch Einsetzen in die ursprüngliche Funktion.

Beispiel 1: Die Substitution

Teil 1 von 2 · Zwei positive z-Werte führen später zu vier Nullstellen.

DIE AUFGABE

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

1 $f(x) = 0$ bilden

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Setze den gesamten Funktionsterm gleich 0.

2 Die kleinste x-Potenz substituieren

Die Exponenten sind 4 und 2. Weil 4 doppelt so groß wie 2 ist, setzen wir $z = x^2$. Dann gilt $x^4 = (x^2)^2 = z^2$.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Aus x^4 wird z^2 . Aus x^2 wird z . Die Zahl 4 bleibt unverändert.

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Das ist jetzt eine quadratische Gleichung in z .

3 Die neue Gleichung mit der pq-Formel lösen

Vor z^2 steht bereits eine 1. Du kannst $p = -5$ und $q = 4$ direkt ablesen.

$$z_{1,2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 4}$$

Setze $p = -5$ und $q = 4$ ein. Die Klammer um -5 ist wichtig.

$$z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}}$$

Minus vor Minus wird Plus. $(-5/2)^2 = 25/4$ und $4 = 16/4$.

$$z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Unter der Wurzel bleibt $9/4$. Die Quadratwurzel daraus ist $3/2$.

EINMAL MIT PLUS

$$z_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

EINMAL MIT MINUS

$$z_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

NOCH NICHT FERTIG!

4 und 1 sind z-Werte. Gesucht sind aber x-Werte. Deshalb geht es auf der nächsten Seite mit der Resubstitution weiter.

Beispiel 1: Zurück zu x

Teil 2 von 2 · Resubstituieren, Wurzeln ziehen und das Ergebnis prüfen.

DAS HABEN WIR BEREITS

Für $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ haben wir $z = x^2$ gesetzt.
Die neue Gleichung hat die Lösungen $z_1 = 4$ und $z_2 = 1$.

4 Für jeden z-Wert eine Gleichung in x aufschreiben

$$x^2 = 4 \quad \text{oder} \quad x^2 = 1$$

Wir ersetzen z wieder durch x^2 . Bearbeite nun beide Gleichungen.

5 Die Quadratwurzel ziehen: beide Vorzeichen beachten

ERSTE GLEICHUNG

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

Denn $(-2)^2 = 4$ und $2^2 = 4$.

ZWEITE GLEICHUNG

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x_3 = -1, \quad x_4 = 1$$

Denn $(-1)^2 = 1$ und $1^2 = 1$.

DIE GESUCHTEN NULLSTELLEN

$$L = \{-2; -1; 1; 2\}$$

Die Funktion hat **vier verschiedene Nullstellen**. L ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(x) = 0$.

01 Die Probe: in die ursprüngliche Funktion einsetzen

$$f(-2) = 16 - 20 + 4 = 0$$

$$f(2) = 16 - 20 + 4 = 0$$

$$f(-1) = 1 - 5 + 4 = 0$$

$$f(1) = 1 - 5 + 4 = 0$$

WICHTIGER UNTERSCHIED

$\sqrt{4} = 2$. Das Wurzelzeichen liefert die **nichtnegative** Wurzel. Die **Gleichung** $x^2 = 4$ hat aber zwei Lösungen: $x = -2$ und $x = 2$.

Beispiel 2: Erst normieren

Teil 1 von 2 · Vor der pq-Formel muss vor z^2 eine 1 stehen.

DIE AUFGABE

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = 2x^4 + 6x^2 - 8$.

1 $f(x) = 0$ bilden

$$2x^4 + 6x^2 - 8 = 0$$

Setze den Funktionsterm gleich 0.

2 Mit $z = x^2$ substituieren

$$2z^2 + 6z - 8 = 0$$

x^4 wird zu z^2 und x^2 wird zu z . Die Zahlen davor bleiben erhalten.

3 Normieren und die quadratische Gleichung lösen

Vor z^2 steht eine 2. Teile deshalb die **gesamte Gleichung** durch 2. So entsteht die passende Form für die pq-Formel.

$$2z^2 + 6z - 8 = 0 \quad | :2$$

Jeder Term wird durch 2 geteilt. Auch rechts gilt: $0 : 2 = 0$.

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

Jetzt gilt $p = 3$ und $q = -4$. Das Minus gehört zu q .

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-4)}$$

Setze p und q ein. Aus $-(-4)$ wird $+4$.

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$$

Schreibe 4 als $16/4$. Unter der Wurzel ergibt sich $25/4$.

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Die Quadratwurzel aus $25/4$ ist $5/2$.

EINMAL MIT PLUS

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$$

EINMAL MIT MINUS

$$z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -4$$

EIN z -WERT IST NEGATIV

Das ist ein gültiges Ergebnis der **z -Gleichung**. Ob daraus ein reeller x -Wert entsteht, prüfen wir erst bei der Resubstitution.

Beispiel 2: Ein z-Wert fällt weg

Teil 2 von 2 · Warum ein negativer z-Wert bei $z = x^2$ keine reelle Lösung liefert.

DAS HABEN WIR BEREITS

Für $f(x) = 2x^4 + 6x^2 - 8$ gilt $z = x^2$.

Die neue Gleichung hat die Lösungen $z_1 = 1$ und $z_2 = -4$.

4 Beide z-Werte resubstituieren

$$x^2 = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = -4$$

Ersetze z durch x^2 . Prüfe beide Gleichungen getrennt.

5 Prüfen, wo reelle Wurzeln möglich sind

POSITIVER WERT: DAS GEHT

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Es entstehen zwei Lösungen:

$$x = -1 \text{ und } x = 1.$$

NEGATIVER WERT: DAS GEHT NICHT

$$x^2 \geq 0$$

Das Quadrat einer reellen Zahl ist niemals negativ.

$x^2 = -4$ hat **keine reelle Lösung**.

DIE GESUCHTEN NULLSTELLEN

$$L = \{-1; 1\}$$

Die Funktion hat **zwei verschiedene reelle Nullstellen**. Aus $z = -4$ kommt kein weiterer x -Wert hinzu.

01 Die Probe

$$f(-1) = 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 8 = 0$$

$$(-1)^4 = 1 \text{ und } (-1)^2 = 1.$$

$$f(1) = 2 + 6 - 8 = 0$$

Beide gefundenen x -Werte passen.

DIESEN FEHLER VERMEIDEST DU JETZT

Aus $x^2 = -4$ folgt **nicht** $x = -2$! Denn $(-2)^2 = 4$ und nicht -4 . Bei einem negativen z -Wert fällt **nur dieser Zweig** weg, nicht automatisch die ganze Aufgabe.

Auch möglich: Ist die Zahl unter der pq-Wurzel negativ, gibt es keine reellen z -Werte und damit **keine reellen Nullstellen**.

Beispiel 3: Diesmal $z = x^3$

Teil 1 von 2 · Substitution funktioniert auch mit anderen passenden Exponenten.

DIE AUFGABE

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$.

1 $f(x) = 0$ bilden

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

Setze wieder den Funktionsterm gleich 0.

2 Die kleinste x-Potenz durch z ersetzen

Die Exponenten sind **6** und **3**. Weil 6 doppelt so groß wie 3 ist, setzen wir diesmal $z = x^3$.

$$x^6 = (x^3)^2 = z^2$$

Wichtig: x^6 wird zu z^2 . Denn beim Potenzieren werden Exponenten multipliziert: $3 \cdot 2 = 6$.

$$z^2 - 7z - 8 = 0$$

Die neue Gleichung ist wieder quadratisch.

3 Die quadratische Gleichung lösen

Vor z^2 steht bereits eine 1. Daher liest du $p = -7$ und $q = -8$ ab.

$$z_{1,2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - (-8)}$$

Setze beide negativen Zahlen mit Klammern ein.

$$z_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{32}{4}}$$

Aus $-(-8)$ wird $+8$. Schreibe 8 als $32/4$.

$$z_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Unter der Wurzel steht $81/4$. Daraus wird $9/2$.

EINMAL MIT PLUS

$$z_1 = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8$$

EINMAL MIT MINUS

$$z_2 = \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -1$$

ACHTUNG: WIR HABEN $z = x^3$ GESETZT

Den negativen Wert $z = -1$ darfst du hier behalten. Die dritte Potenz einer reellen Zahl kann negativ sein. Das nutzen wir auf der nächsten Seite.

Beispiel 3: Die dritte Wurzel

Teil 2 von 2 · Negative Werte sind erlaubt, und du schreibst hier kein $\pm$.

DAS HABEN WIR BEREITS

Für $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$ gilt $z = x^3$.

Die z-Werte sind $z_1 = 8$ und $z_2 = -1$.

4 Resubstituieren: z wird wieder zu x^3

$$x^3 = 8 \quad \text{oder} \quad x^3 = -1$$

Ersetze z diesmal durch x^3 . Du brauchst also die dritte Wurzel.

5 Die dritte Wurzel ziehen

ERSTE GLEICHUNG

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Denn $2^3 = 8$.

-2 passt nicht: $(-2)^3 = -8$.

ZWEITE GLEICHUNG

$$x = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Denn $(-1)^3 = -1$.

Eine negative Lösung ist erlaubt.

DIE GESUCHTEN NULLSTELLEN

$$L = \{-1; 2\}$$

Die Funktion hat **zwei reelle Nullstellen**. Jede x^3 -Gleichung liefert einen reellen x-Wert.

01 Die Probe

$$f(2) = 64 - 7 \cdot 8 - 8 = 0$$

$$f(-1) = 1 - 7 \cdot (-1) - 8 = 0$$

$$2^6 = 64 \text{ und } 2^3 = 8.$$

$$(-1)^6 = 1 \text{ und } (-1)^3 = -1. \text{ Also: } 1 + 7 - 8 = 0.$$

DEIN MERKSATZ FÜR DIE RESUBSTITUTION

Gerade Wurzel (z. B. bei x^2 oder x^4): positiver Wert $\rightarrow$ zwei Lösungen mit $\pm$; 0 $\rightarrow$ eine Lösung; negativer Wert $\rightarrow$ keine reelle Lösung.

Ungerade Wurzel (z. B. bei x^3): jeder reelle Wert $\rightarrow$ genau eine reelle Lösung, **ohne $\pm$** .

Dein Check: alle z-Werte bearbeitet · passende Wurzel · x-Werte notiert · Probe gemacht.