

Polynom-Asymptoten höheren Grades

wenn die Asymptote keine Gerade mehr ist

einfach mathe!

1. Was ist eine Polynom-Asymptote höheren Grades?

Eine Polynom-Asymptote ist keine Gerade, sondern ein Polynom, zum Beispiel eine Parabel. Der Graph der Funktion nähert sich diesem Polynom für große $|x|$ -Werte immer mehr an.

waagerechte Asymptote: $y = b$

schiefe Asymptote: $y = m \cdot x + b$

Polynom-Asymptote höheren Grades: z. B. $y = x^2 - 1$
oder $y = x^3 - x$

2. Wann tritt sie bei gebrochenrationalen Funktionen auf?

- 1 Kürzen** Wenn möglich zuerst gemeinsame Faktoren kürzen.
- 2 Grade vergleichen** Ist der Zählergrad größer als der Nennergrad, machen wir Polynomdivision.
- 3 Polynomdivision** Wir teilen Zähler durch Nenner.
- 4 Quotient betrachten** Ist der Quotient eine Gerade, ist die Asymptote schief. Ist der Quotient eine Parabel oder ein anderes Polynom mit Grad 2 oder höher, ist es eine Polynom-Asymptote höheren Grades.
- 5 Restterm prüfen** Geht der Restbruch für $|x| \rightarrow \infty$ gegen 0, dann ist der Quotient die Asymptote.

Typisch ist:
Zählergrad – Nennergrad = Grad der Asymptote.

Beispiel:
Differenz 2 $\rightarrow$ oft quadratische Asymptote.

3. Wichtige Begriffe einfach erklärt

Quotient

Das Ergebnis der Polynomdivision. Dieser Teil wird später zur Asymptote.

Rest

Was nach der Division übrig bleibt.

Restbruch

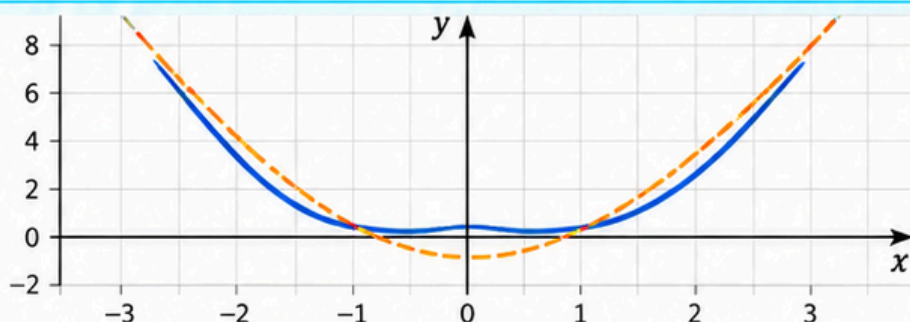
Der Rest geteilt durch den Nenner. Dieser Teil geht für große $|x|$ -Werte gegen 0.



Funktion = Quotient + Restbruch:

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)}$$

4. Skizze



Polynom-Asymptote:

z. B. $y = x^2 - 1$

Funktion:

z. B. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$

Der Abstand zwischen Graph und Polynom-Asymptote wird nach links und rechts immer kleiner.

Polynom-Asymptoten höheren Grades

Polynomdivision – wenn die Asymptote keine Gerade mehr ist

einfach mathe!

4. Beispiel 1 – Polynom-Asymptote bestimmen

Beispiel 1 Bestimme die **Polynom-Asymptote**.

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

Lösung in 5 Schritten

1 Kürzen

Gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner: keine.
Die Funktion kann nicht gekürzt werden.

2 Grade vergleichen

Zählergrad 4, Nennergrad 2 → Differenz 2.
Eine Polynom-Asymptote 2. Grades ist möglich.

3 Polynomdivision

Damit dividieren wir den Zähler durch den Nenner.

Vorher fehlende Potenzen ergänzen:
 $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$.

Wir teilen (Zähler) : (Nenner), also
 $(x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1) : (x^2 + 1)$.

Tipp Fertig, wenn Restgrad < Nennergrad. Hier: Restgrad $0 < 2$.

$$\begin{array}{r} (x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1) : (x^2 + 1) = x^2 - 1 \\ x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ - (x^4 + x^2) \\ \hline -x^2 + 0x + 1 \\ - (-x^2 - 1) \\ \hline 2 \end{array}$$

4 Ergebnis schreiben

Aus der Division folgt:

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) + 2$$

Allgemein gilt:

Zähler = Nenner · Quotient + Rest

5 Restterm und Polynom-Asymptote

Damit gilt:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad \frac{2}{x^2 + 1} \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Der Quotient $x^2 - 1$ ist die Gleichung der Polynom-Asymptote.

→ **Ergebnis:** **Polynom-Asymptote** $y = x^2 - 1$

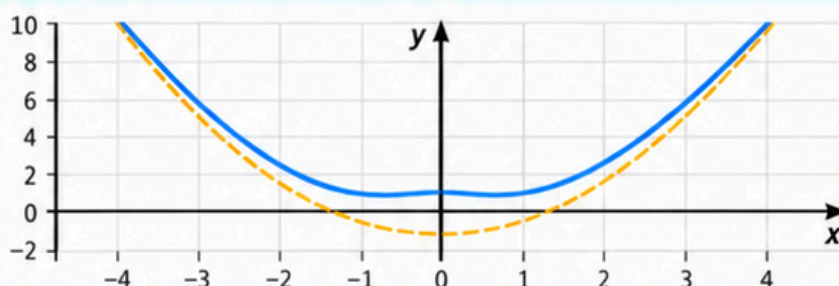
Woran merkt man, dass die Polynomdivision fertig ist?

Die Polynomdivision ist beendet, wenn der Grad des Restes kleiner ist als der Grad des Nenners.
Hier ist der Rest 2 (Grad 0) und der Nenner hat Grad 2. Damit kann nicht weiter dividiert werden.

5. Warum funktioniert das?

Durch die Polynomdivision wird die Funktion zerlegt in Polynom + Restbruch.
Für große $|x|$ -Werte wird der Restbruch immer kleiner und geht gegen 0.
Deshalb nähert sich der Graph immer mehr dem Polynom $y = x^2 - 1$.

6. Graph zum Beispiel



--- Polynom-Asymptote:
 $y = x^2 - 1$

— Funktion:
 $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$

Der Abstand zwischen Graph und Polynom-Asymptote wird nach links und rechts immer kleiner.

5. Beispiel 2 – Polynom-Asymptote bestimmen

Beispiel 2 Bestimme die Polynom-Asymptote.

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x + 1}$$

Lösung in 5 Schritten

1 Kürzen

Gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner: keine.
Die Funktion kann nicht gekürzt werden.

2 Grade vergleichen

Zählergrad 3, Nennergrad 1 → Differenz 2.
Eine Polynom-Asymptote 2. Grades ist möglich.

3 Polynomdivision

Vorbereitung:
Fehlende Potenzen ergänzen:
 $x^3 + 2x^2 + 0x + 3$.

Dann teilen wir (Zähler) : (Nenner):
 $(x^3 + 2x^2 + 0x + 3) : (x + 1)$.

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + 0x + 3 : (x + 1) = x^2 + x - 1 \\ x^3 + x^2 \\ \hline x^2 + 0x \\ -(x^2 + x) \\ \hline -x + 3 \\ -(-x - 1) \\ \hline 4 \end{array}$$

4 Ergebnis schreiben

Aus der Division folgt:
 $x^3 + 2x^2 + 3 = (x + 1) \cdot (x^2 + x - 1) + 4$

Allgemein gilt:

Zähler = Nenner · Quotient + Rest

5 Restterm und Polynom-Asymptote

Damit gilt:

$$g(x) = x^2 + x - 1 + \frac{4}{x + 1} \quad \text{und} \quad \frac{4}{x + 1} \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

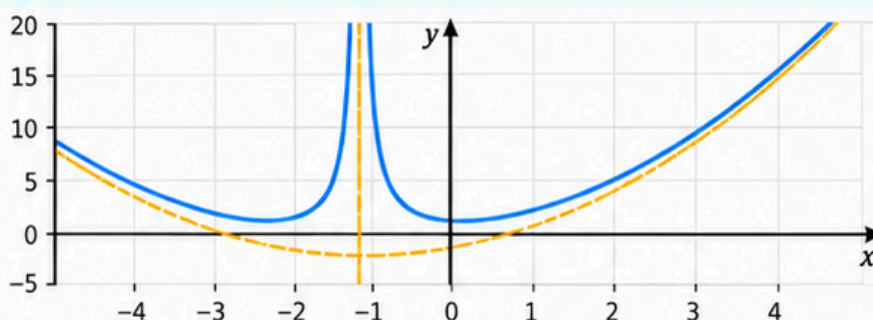
Der Quotient $x^2 + x - 1$ ist die Gleichung der Polynom-Asymptote.

→ **Ergebnis:** Polynom-Asymptote $y = x^2 + x - 1$

Woran merkt man, dass die Polynomdivision fertig ist?

Die Polynomdivision ist beendet, wenn der Grad des Restes kleiner ist als der Grad des Nenners.
Hier ist der Rest 4 (Grad 0) und der Nenner hat Grad 1. Damit kann nicht weiter dividiert werden.

6. Graph zum Beispiel



--- Polynom-Asymptote:

$$y = x^2 + x - 1$$

— Funktion:

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x + 1}$$

Der Abstand zwischen Graph und Polynom-Asymptote wird nach links und rechts immer kleiner.

7. Mini-Training

Bestimme jeweils die Polynom-Asymptote.

A

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x + 1}$$

B

$$g(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1}$$

C

$$h(x) = \frac{x^5 + 1}{x^2 + 1}$$

D

$$p(x) = \frac{x^4 + x}{x^2 + 1}$$

8. Kurzlösungen

A

Polynom-Asymptote: $y = x^2 + x - 1$

Restbruch geht gegen 0.

B

Polynom-Asymptote: $y = x^2 - 1$

Restbruch geht gegen 0.

C

Polynom-Asymptote: $y = x^3 - x$

Restbruch geht gegen 0.

D

Polynom-Asymptote: $y = x^2 - 1$

Restbruch geht gegen 0.

Merke

Bei Polynom-Asymptoten höheren Grades ist der Quotient der Polynomdivision die Asymptote. Der Restbruch verschwindet für große $|x|$ -Werte, weil er gegen 0 geht.