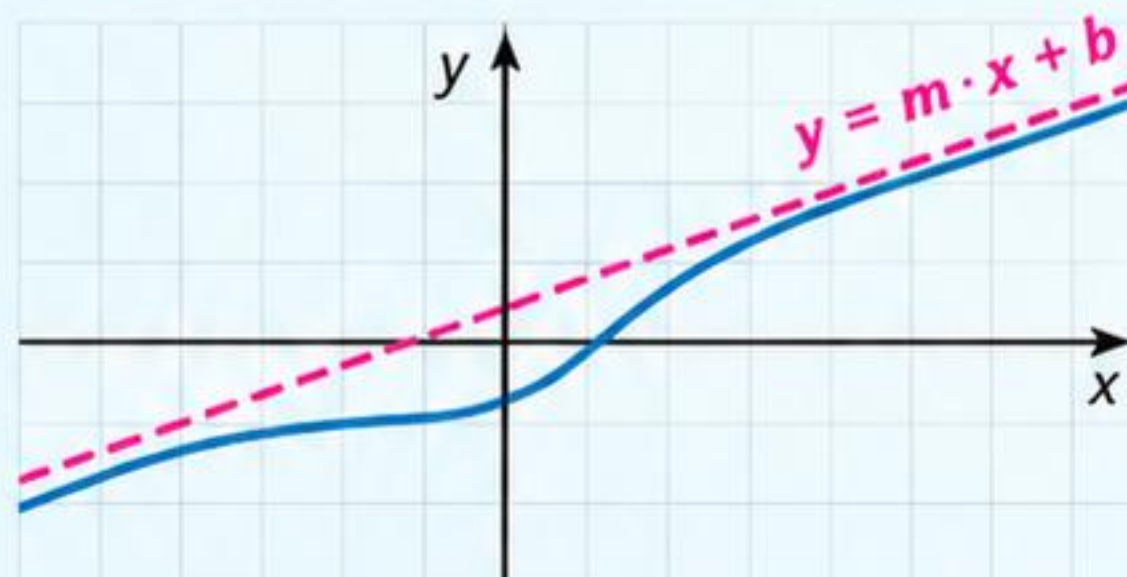


1. Was ist eine schiefe Asymptote?

Eine *schiefe Asymptote* ist eine schräge Gerade, der sich der Graph für sehr große positive und sehr große negative x -Werte immer mehr annähert.

Wichtig: Die Gerade muss schräg sein, also weder waagerecht noch senkrecht.



2. Wann tritt sie bei gebrochenrationalen Funktionen auf?

- | | | |
|----------|----------------------------|---|
| 1 | Wenn nötig kürzen | Gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner zuerst kürzen. |
| 2 | Grade vergleichen | Schiefe Asymptote typisch bei $\text{Grad } Z = \text{Grad } N + 1$. |
| 3 | Polynomdivision | Zähler durch Nenner teilen. |
| 4 | Restterm betrachten | Der Restbruch geht für $ x \rightarrow \infty$ gegen 0. |
| 5 | Asymptote angeben | Der Polynomteil der Division ist die Asymptote $y = m \cdot x + b$. |

3. Wichtige Hinweise

- 1** $\text{Grad } Z = \text{Grad } N + 1$ ist die typische Bedingung für eine schiefe Gerade.
- 2** $\text{Grad } Z = \text{Grad } N$ bedeutet normalerweise waagerechte Asymptote.
- 3** Ist die Graddifferenz größer als 1, entsteht keine schiefe Gerade; möglich ist eine Asymptote höheren Grades.
- 4** Die Asymptote gehört nicht als „Teil“ zur Funktion – sie beschreibt das Endverhalten.

Merke



Bei schiefen Asymptoten ist die Polynomdivision die wichtigste Methode.

Schiefe Asymptoten

Polynomdivision – die zentrale Methode

einfach mathe!

4. Beispiel 1 – schiefe Asymptote bestimmen

Beispiel 1 Bestimme die schiefe Asymptote.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$$

Lösung in 5 Schritten

1 Kürzen

Gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner: keine.
Die Funktion kann nicht gekürzt werden.

2 Grade vergleichen

Zählergrad 2, Nennergrad 1 → Differenz 1.
Eine schiefe Asymptote ist möglich.

3 Polynomdivision

Vorbereitung:

Fehlende Potenzen ergänzen:
 $x^2 + 1 = x^2 + 0x + 1$.
Die lineare Potenz fehlt und bekommt den Koeffizienten 0.

Dann teilen wir (Zähler) : (Nenner):
 $(x^2 + 0x + 1) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r} x^2 + 0x + 1 : (x + 2) = x - 2 \\ -(x^2 + 2x) \\ \hline -2x + 1 \\ -(-2x - 4) \\ \hline 5 \end{array}$$

Tipp

Fertig, wenn
Restgrad <
Nennergrad.
Hier: Grad(5) = 0
< 1.

4 Ergebnis schreiben

Aus der Division folgt:
 $x^2 + 1 = (x + 2) \cdot (x - 2) + 5$

Allgemein gilt:

Zähler = Nenner · Quotient + Rest

5 Restterm und Asymptote

Damit gilt:

$$f(x) = x - 2 + \frac{5}{x + 2} \quad \text{und} \quad \frac{5}{x + 2} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Der Quotient $x - 2$ ist die Gleichung der schiefen Asymptote.



Ergebnis:

Schiefe Asymptote $y = x - 2$

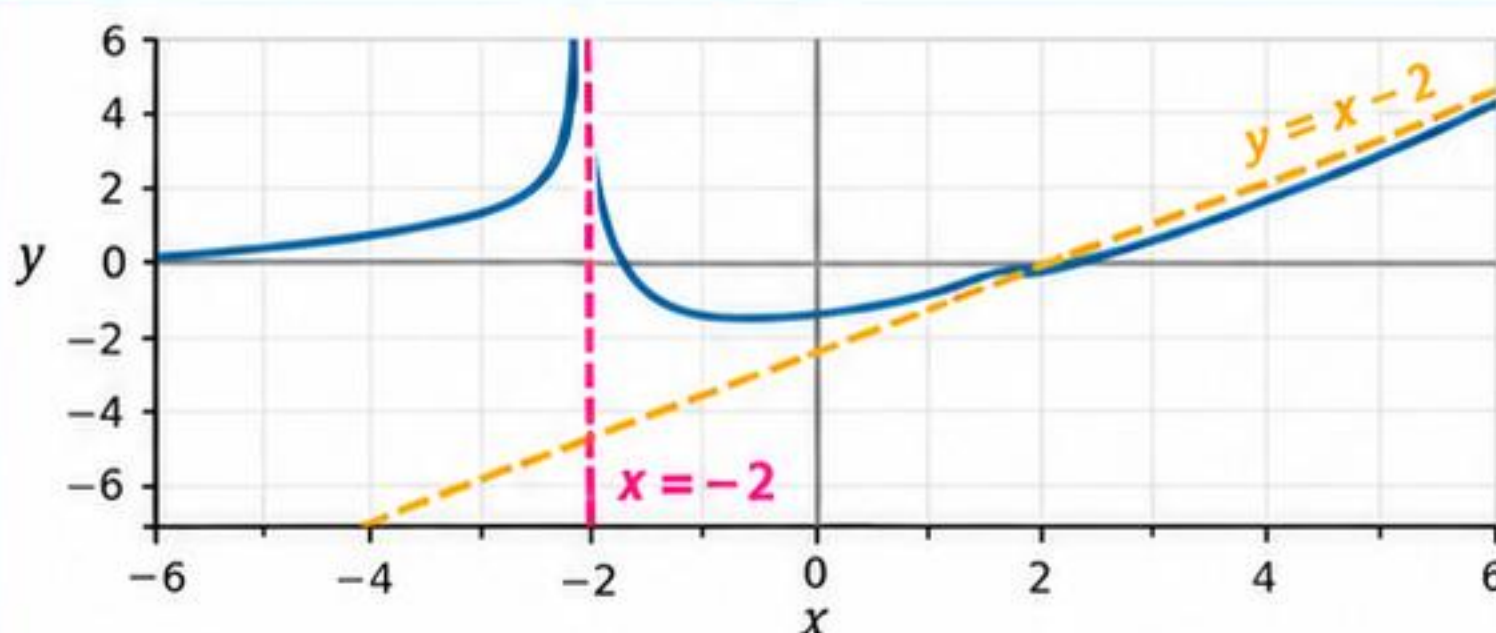
Woran merkt man, dass die Polynomdivision fertig ist?

Die Polynomdivision ist beendet, wenn der Grad des Restes kleiner ist als der Grad des Nenners.
Hier ist der Rest 5 (Grad 0) und der Nenner hat Grad 1. Damit kann nicht weiter dividiert werden.

5. Warum funktioniert das?

Durch die Polynomdivision wird die Funktion zerlegt in Gerade + Restbruch.
Der Restbruch wird für sehr große $|x|$ -Werte immer kleiner und geht gegen 0.
Deshalb nähert sich der Graph immer mehr der Geraden $y = x - 2$.

6. Graph zum Beispiel



--- Schiefe Asymptote:
 $y = x - 2$

--- Senkrechte Asymptote:
 $x = -2$

Der Abstand zwischen Graph und schiefer Asymptote wird nach links und rechts immer kleiner.

7. Beispiel 2 – schiefe Asymptote bestimmen

Beispiel 2 Bestimme die schiefe Asymptote.

$$g(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1}$$

Lösung in 5 Schritten

1 Kürzen

Gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner: keine.
Die Funktion kann nicht gekürzt werden.

2 Grade vergleichen

Zählergrad 2, Nennergrad 1 → Differenz 1.
Eine schiefe Asymptote ist möglich.

3 Polynomdivision

Vorbereitung:
Hier fehlen keine Potenzen – alle
Potenzen von x sind vorhanden.

Dann teilen wir (Zähler) : (Nenner):
 $(2x^2 + 3x + 1) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 1 : (x - 1) = 2x + 5 \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline 5x + 1 \\ -(5x - 5) \\ \hline 6 \end{array}$$

Tipp

Fertig, wenn
Restgrad <
Nennergrad.
Hier: Grad(6) = 0
< 1.

4 Ergebnis schreiben

Aus der Division folgt:

$$2x^2 + 3x + 1 = (x - 1) \cdot (2x + 5) + 6$$

Allgemein gilt:

Zähler = Nenner · Quotient + Rest

5 Restterm und Asymptote

Damit gilt:

$$g(x) = 2x + 5 + \frac{6}{x - 1} \quad \text{und} \quad \frac{6}{x - 1} \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Der Quotient $2x + 5$ ist die Gleichung der schiefen Asymptote.



Ergebnis:

Schiefe Asymptote $y = 2x + 5$

Woran merkt man, dass die Polynomdivision fertig ist?

Die Polynomdivision ist beendet, wenn der Grad des Restes kleiner ist als der Grad des Nenners.
Hier ist der Rest 6 (Grad 0) und der Nenner hat Grad 1. Damit kann nicht weiter dividiert werden.

8. Warum funktioniert das?

Durch die Polynomdivision wird die Funktion zerlegt in Gerade + Restbruch.

Der Restbruch $\frac{6}{x - 1}$ wird für sehr große $|x|$ -Werte immer kleiner und geht gegen 0.

Deshalb nähert sich der Graph immer mehr der Geraden $y = 2x + 5$.

9. Mini-Training

Bestimme die schiefe Asymptote oder entscheide, ob keine schiefe Asymptote vorliegt.

A $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 1}$

B $g(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x + 1}$

C $h(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

D $p(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

E $q(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

F $r(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

10. Kurzlösungen

A Polynomdivision: $x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1) + 5$
 $\rightarrow f(x) = x + 1 + \frac{5}{x - 1} \rightarrow$ **schiefe Asymptote:** $y = x + 1$

B $3x^2 - x + 2 = (x + 1)(3x - 4) + 6$
 $\rightarrow g(x) = 3x - 4 + \frac{6}{x + 1} \rightarrow$ **schiefe Asymptote:** $y = 3x - 4$

C $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = x + 1$, aber $x = -1$ ist ausgeschlossen
 $\rightarrow$ **keine schiefe Asymptote, sondern Gerade** $y = x + 1$ **mit Lücke**

D $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 0$
 $\rightarrow$ **keine schiefe Gerade; der Quotient ist quadratisch**

E $2x^2 - 5x + 7 = (x - 2)(2x - 1) + 5$
 $\rightarrow q(x) = 2x - 1 + \frac{5}{x - 2} \rightarrow$ **schiefe Asymptote:** $y = 2x - 1$

F $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, aber $x = 1$ ist ausgeschlossen
 $\rightarrow$ **keine schiefe Asymptote, sondern Gerade** $y = x + 1$ **mit Lücke**

Merke

Eine schiefe Asymptote erhält man bei gebrochenrationalen Funktionen typischerweise dann, wenn nach dem Kürzen gilt: $\text{Grad}(\text{Zähler}) = \text{Grad}(\text{Nenner}) + 1$. Dann liefert die Polynomdivision den linearen Quotienten – und genau dieser ist die Gleichung der schiefen Asymptote.