

Senkrechte Asymptoten

verstehen – bestimmen – sicher unterscheiden

einfach mathe!

1. Was ist eine senkrechte Asymptote?

Kurz erklärt

Eine **senkrechte Asymptote** ist eine Gerade der Form $x = a$.

Wenn sich x der Zahl a nähert, wird $f(x)$ **immer größer oder kleiner**, also geht gegen $+\infty$ oder $-\infty$.
Der Graph nähert sich der Geraden $x = a$ an.

2. Wichtig: Nicht jede Definitionslücke ist eine Asymptote

Wichtig

Nicht jede Definitionslücke ist automatisch eine senkrechte Asymptote.

Wenn sich ein gemeinsamer Faktor herauskürzen lässt, kann statt einer Asymptote nur eine Lücke im Graphen entstehen.

3. So gehst du vor

- | | | |
|---|--|--|
| 1 | Nenner = 0 | Kandidaten für senkrechte Asymptoten finden. |
| 2 | Zähler prüfen | Prüfen: Wird der Zähler dort auch 0? |
| 3 | Wenn nötig kürzen | Gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner ggf. kürzen. |
| 4 | Wenn gefordert Grenzwertverhalten | Prüfen, ob $f(x)$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ geht. |
| 5 | Ergebnis | Asymptote oder Lücke klar angeben. |

4. Merke

Merke

Senkrechte Asymptote: $x = a$.

Lücke: Der Term ist dort nicht definiert, der Graph hat an dieser Stelle nur ein Loch.

Senkrechte Asymptoten

verstehen – bestimmen – sicher unterscheiden

einfach mathe!

5. Beispiel 1 – echte senkrechte Asymptote

Aufgabe

Bestimme die **senkrechte Asymptote** der Funktion $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

Lösung in 5 Schritten

1 **Nenner = 0**

Rechnung: $x - 3 = 0 \quad | +3 \Rightarrow x = 3$

2 **Zähler prüfen**

Rechnung: $2 \cdot 3 + 1 = 7 \neq 0$
Der Zähler wird dort nicht 0.

3 **Wenn nötig kürzen**

Kein gemeinsamer Faktor vorhanden – der Term lässt sich nicht kürzen.

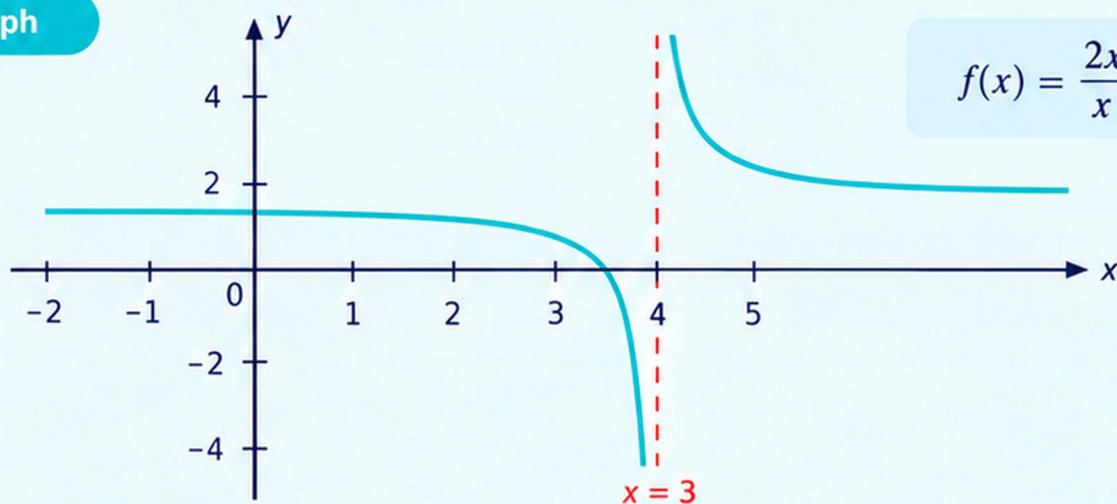
4 **Wenn gefordert
Grenzwertverhalten**

Für $x \rightarrow 3^-$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$, für $x \rightarrow 3^+$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.
In der Nähe von $x = 3$ wird der Graph also unbegrenzt groß bzw. klein.

5 **Ergebnis**

Senkrechte Asymptote: $x = 3$

Graph



Merke

Wird der Nenner 0, der Zähler aber nicht 0, spricht das für eine senkrechte Asymptote.

Senkrechte Asymptoten

verstehen – bestimmen – sicher unterscheiden

einfach mathe!

6. Beispiel 2 – Lücke oder Asymptote?

Untersuche die Funktion $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$.

1 Nenner = 0

Rechnung: $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $(x - 1)(x - 3) = 0$
 $x = 1$ oder $x = 3$

2 Zähler prüfen

Rechnung: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
bei $x = 1$: Zähler = 0
bei $x = 3$: Zähler = $8 \neq 0$

3 Wenn nötig kürzen

Rechnung: $h(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{x + 1}{x - 3}$, aber $x \neq 1$

Der Faktor $(x - 1)$ kürzt sich weg. Deshalb entsteht dort keine senkrechte Asymptote, sondern nur eine Lücke.

4 Wenn gefordert Grenzwertverhalten

Nur bei $x = 3$ bleibt der Nenner nach dem Kürzen problematisch. Dort geht der Graph gegen $\pm\infty$.

Bei $x = 1$ geht der Graph nicht gegen $\pm\infty$ – dort fehlt nur ein Punkt.

5 Ergebnis

Ergebnis

Senkrechte Asymptote: $x = 3$

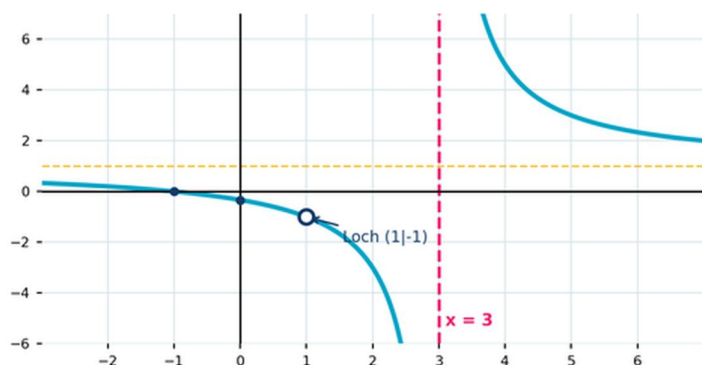
Lücke: bei $x = 1$

Die Lücke liegt bei $(1 | -1)$.

$$y = \frac{1 + 1}{1 - 3} = -1$$

Bedeutung für den Graphen

Nach dem Kürzen sieht der Graph fast genauso aus wie der gekürzte Term. Nur an der gekürzten Stelle fehlt genau ein Punkt – das ist die Lücke.



Senkrechte Asymptoten

verstehen – bestimmen – sicher unterscheiden

einfach mathe!

7. Mini-Training mit Kurzlösungen

A

Aufgabe A

Bestimme, ob eine senkrechte Asymptote vorliegt:

$$f(x) = \frac{5}{x+2}$$

B

Aufgabe B

Untersuche:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

C

Aufgabe C

Untersuche:

$$k(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x-1)}$$

Kurzlösungen

A

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2.$$

Zähler: $5 \neq 0$. Nicht kürzbar.

Ergebnis: senkrechte Asymptote $x = -2$.

B

$$x-2=0 \Rightarrow x=2.$$

Zähler bei $x=2$ ebenfalls 0.

Kürzen: $g(x) = x+2$, aber $x \neq 2$.

Ergebnis: keine senkrechte Asymptote, sondern Lücke bei $(2 | 4)$.

C

Nenner = 0 bei $x = -2$ oder $x = 1$.

Der Faktor $(x+2)$ kürzt sich. Es bleibt $k(x) = \frac{1}{x-1}$, aber $x \neq -2$.

Ergebnis: Lücke bei $(-2 | -1/3)$ und senkrechte Asymptote $x = 1$.

Schnellcheck

Schnellcheck

1. Nenner = 0 liefert nur Kandidaten.
2. Kürzt sich ein gemeinsamer Faktor weg, kann eine Lücke entstehen.
3. Bleibt nach dem Kürzen eine problematische Nenner-Nullstelle übrig, spricht das für eine senkrechte Asymptote.