

Steckbriefaufgaben

Vom Aufgabentext zur Gleichung: Die wichtigsten Übersetzungen auf einen Blick.

DEIN MERKSATZ

Punkt $\rightarrow f$ • Steigung $\rightarrow f'$ • Wendestelle $\rightarrow f''$

01 Punkte und Schnittpunkte mit den Achsen

Formulierung im Aufgabentext	Mathematische Übersetzung	Kommt häufig vor?
... geht durch $P(1 \mid 3)$.	$f(1) = 3$	Sehr wichtig
... geht durch den Ursprung .	$f(0) = 0$	Wichtig
... hat eine Nullstelle bei $x = 2$.	$f(2) = 0$	Sehr wichtig
... schneidet die y-Achse bei $y = -1$.	$f(0) = -1$	Sehr wichtig
... berührt die x-Achse bei $x = -3$.	$f(-3) = 0$ $f'(-3) = 0$	Sehr wichtig

02 Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte

Formulierung im Aufgabentext	Mathematische Übersetzung	Kommt häufig vor?
... hat einen Hochpunkt oder Tiefpunkt bei $P(1 \mid 4)$.	$f(1) = 4$ $f'(1) = 0$	Sehr wichtig
... hat eine Hochstelle oder Tiefstelle bei $x = 4$.	$f'(4) = 0$	Sehr wichtig
... hat bei $x = 2$ eine waagerechte Tangente .	$f'(2) = 0$	Sehr wichtig
... hat einen Wendepunkt $W(-1 \mid 3)$.	$f(-1) = 3$ $f''(-1) = 0$	Sehr wichtig
... hat eine Wendestelle bei $x = 2$.	$f''(2) = 0$	Wichtig
... hat einen Sattelpunkt / Terrassenpunkt $S(3 \mid 6)$.	$f(3) = 6$ $f'(3) = 0$ $f''(3) = 0$	Wichtig

Achte auf den Unterschied: Ein Punkt nennt x und y . Eine Stelle nennt nur x .
Die Gleichungen liefern Bedingungen. Hinweise zur Kontrolle stehen auf Seite 3.

Weitere Übersetzungen

Lies genau: Eine Formulierung kann dir mehrere Bedingungen gleichzeitig liefern.

03 Steigungen und Tangenten

Formulierung im Aufgabentext	Mathematische Übersetzung	Kommt häufig vor?
... besitzt bei $x = 1$ die Steigung 5.	$f'(1) = 5$	Sehr wichtig
... hat bei $x = 2$ dieselbe Steigung wie die Gerade $y = 6x + 1$.	$f'(2) = 6$	Wichtig
... hat bei $x = 4$ die Tangente $y = 2x + 1$.	$f(4) = 9$ $f'(4) = 2$	Wichtig
... hat in $P(1 \mid 5)$ eine Tangente parallel zur Geraden $y = 4x$.	$f(1) = 5$ $f'(1) = 4$	Wichtig
... hat im Wendepunkt $W(1 \mid 3)$ die Steigung 2.	$f(1) = 3$ $f'(1) = 2$ $f''(1) = 0$	Wichtig
... berührt die Gerade $y = 2x + 1$ bei $x = 3$.	$f(3) = 7$ $f'(3) = 2$	Wichtig
... berührt den Graphen von g bei $x = 2$.	$f(2) = g(2)$ $f'(2) = g'(2)$	Mittel
... hat in $P(1 \mid 5)$ eine Tangente senkrecht zu $y = 2x + 3$.	$f(1) = 5$ $f'(1) = -\frac{1}{2}$	Selten
... beginnt im Punkt $P(0 \mid 2)$ waagrecht.	$f(0) = 2$ $f'(0) = 0$	Wichtig

04 Übergänge und Symmetrie

Formulierung im Aufgabentext	Mathematische Übersetzung	Kommt häufig vor?
... schließt bei $x = 2$ ohne Sprung an g an.	$f(2) = g(2)$	Mittel
... schließt bei $x = 2$ ohne Sprung und ohne Knick an g an.	$f(2) = g(2)$ $f'(2) = g'(2)$	Mittel
... ist achsensymmetrisch zur y -Achse.	Nur gerade Potenzen: z. B. $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$	Wichtig
... ist punktsymmetrisch zum Ursprung .	Nur ungerade Potenzen: z. B. $f(x) = ax^3 + bx$	Wichtig

Symmetrie: Die Regeln gelten für ganzrationale Funktionen. Bei y -Achsensymmetrie ist ein konstanter Term erlaubt; bei Ursprungssymmetrie fällt er weg.

Das hilft dir beim Lösen

Fünf Merkhilfen für mehr Sicherheit beim Übersetzen und Rechnen.

01 Punkt oder Stelle?

Hochpunkt $H(2 \mid 5)$: $f(2) = 5$ und $f'(2) = 0$.

Hochstelle bei $x = 2$: nur $f'(2) = 0$. Die Höhe ist noch unbekannt.

02 Was bedeuten die Ableitungen?

$f(x)$: Höhe des Graphen. **$f'(x)$:** Steigung des Graphen.

$f'(x) > 0$: bergauf. $f'(x) < 0$: bergab. $f'(x) = 0$: waagrecht.

$f''(x)$: Wie ändert sich die Steigung? An einer Wendestelle gilt $f''(x) = 0$.

03 Eine Tangente verrät Höhe und Steigung.

Bei $y = mx + n$ ist m die Steigung. Für die Höhe setzt du die Berührstelle in die Geradengleichung ein.

Beispiel: $y = 2x + 1$ bei $x = 4 \rightarrow y = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Du erhältst: $f(4) = 9$ und $f'(4) = 2$.

04 Wähle den passenden Funktionsansatz.

2. Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow 3$ Unbekannte.

3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow 4$ Unbekannte.

Ohne weitere Vorgaben brauchst du genauso viele unabhängige Bedingungen. Jede muss eine neue Information liefern. Symmetrie kann Unbekannte einsparen. Der Koeffizient vor der höchsten Potenz darf nicht 0 sein.

05 Eine Bedingung ist noch kein Nachweis.

$f'(x) = 0$ allein beweist keinen Hoch- oder Tiefpunkt!

Gilt dort zusätzlich $f''(x) < 0$, ist es ein Hochpunkt; bei $f''(x) > 0$ ein Tiefpunkt. Ist $f''(x) = 0$, prüfe weiter, z. B. den Vorzeichenwechsel von f' .

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ reichen als Nachweis aus.

Sattelpunkt: ein Wendepunkt mit zusätzlich $f'(x) = 0$.

So nutzt du die Häufigkeitsspalte

Sehr wichtig: zuerst lernen. **Wichtig:** regelmäßig üben. **Mittel:** ergänzend üben. **Selten:** Sonderfall kennen. Die Einstufung ist eine grobe Lernorientierung, keine feste Statistik. Je nach Kurs kann sie abweichen.

Beispiel 1: Den Text verstehen

Teil 1 von 3 · Vom Aufgabentext zu den Bedingungen

DIE AUFGABE

Eine ganzrationale Funktion 2. Grades hat den Hochpunkt **H(1 | 4)**. Ihr Graph schneidet die y-Achse bei **y = 3**. Bestimme die Funktionsgleichung.

1 Den Ansatz aufschreiben und ableiten

„2. Grades“ bedeutet: Die höchste Potenz ist x^2 . Wir schreiben zunächst den allgemeinen Ansatz auf. Die Zahlen a, b und c kennen wir noch nicht.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Drei unbekannte Zahlen: a, b und c.

Für einen Hochpunkt brauchen wir die erste Ableitung. Beim Ableiten behandeln wir a, b und c wie feste Zahlen: ax^2 wird zu $2ax$, bx wird zu b und c fällt weg.

$$f'(x) = 2ax + b$$

Die erste Ableitung beschreibt die Steigung.

2 Jede Angabe in Bedingungen übersetzen

ANGABE: HOCHPUNKT H(1 | 4)

Der Hochpunkt liefert **zwei** Informationen: Er liegt bei $x = 1$ auf der Höhe $y = 4$. Außerdem ist die Tangente dort waagerecht.

I $f(1) = 4$

Punkt auf dem Graphen: Setzt du 1 in f ein, kommt 4 heraus.

II $f'(1) = 0$

Die Steigung bei $x = 1$ ist 0. Das ist eine notwendige Bedingung für einen Hochpunkt.

ANGABE: SCHNITT MIT DER y-ACHSE BEI y = 3

Auf der y-Achse ist x immer 0. Der Schnittpunkt ist deshalb **P(0 | 3)**.

III $f(0) = 3$

Setzt du 0 in f ein, kommt 3 heraus.

Was bedeuten I, II und III? Das sind nur Nummern für unsere Bedingungen. Wir behalten sie beim Einsetzen und beim Lösen bei.

Beispiel 1: Das LGS aufstellen

Teil 2 von 3 · Einsetzen, vereinfachen und die Gleichungen sammeln

3 Die Bedingungen in die passenden Formeln einsetzen

DIESE FORMELN BRAUCHEN WIR

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Bei $f(\dots)$ benutzt du f . Bei $f'(\dots)$ benutzt du die erste Ableitung.

I: Die Bedingung $f(1) = 4$ einsetzen. Ersetze in $f(x)$ jedes x durch 1. Rechts steht die vorgegebene Höhe 4.

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 4$$

Zuerst vollständig einsetzen.

$$\text{I} \quad a + b + c = 4$$

Vereinfachen: $1^2 = 1$, $a \cdot 1 = a$ und $b \cdot 1 = b$.

II: Die Bedingung $f'(1) = 0$ einsetzen. Jetzt benutzt du $f'(x)$, weil es um die Steigung geht.

$$2a \cdot 1 + b = 0$$

Ersetze x in $f'(x)$ durch 1.

$$\text{II} \quad 2a + b = 0$$

Vereinfachen: $2a \cdot 1 = 2a$.

III: Die Bedingung $f(0) = 3$ einsetzen. Benutze wieder $f(x)$, weil die Höhe gemeint ist.

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3$$

Ersetze jedes x in $f(x)$ durch 0.

$$0 + 0 + c = 3$$

Alles, was mit 0 multipliziert wird, ist 0.

$$\text{III} \quad c = 3$$

DAS VOLLSTÄNDIGE LINEARE GLEICHUNGSSYSTEM (LGS)

$$\text{I} \quad a + b + c = 4$$

$$\text{II} \quad 2a + b = 0$$

$$\text{III} \quad c = 3$$

Was ist ein LGS? Mehrere Gleichungen, die gleichzeitig stimmen müssen. Wir suchen also Werte für a , b und c , die alle drei Gleichungen erfüllen. Einen Wert kennen wir schon: $c = 3$.

Beispiel 1: Das LGS lösen

Teil 3 von 3 · Unbekannte berechnen, Ergebnis aufschreiben und prüfen

4 Schritt für Schritt nach a, b und c lösen

Zuerst $c = 3$ aus III in I einsetzen.

$$\begin{array}{l} a + b + 3 = 4 \quad | -3 \\ \text{I}^* \quad a + b = 1 \end{array}$$

Auf beiden Seiten 3 abziehen. I* ist die vereinfachte Gleichung I.

Nun II von I* abziehen. In beiden Gleichungen steht +b. Beim Subtrahieren fällt b weg.

$$\begin{array}{l} \text{I}^* \quad a + b = 1 \\ \text{II} \quad 2a + b = 0 \end{array}$$

I* minus II: linke Seite minus linke Seite, rechte minus rechte.

$$(a + b) - (2a + b) = 1 - 0$$

Die Klammern zeigen: Du ziehst die ganze linke Seite ab.

$$\begin{array}{l} a + b - 2a - b = 1 \\ -a = 1 \quad | : (-1) \\ a = -1 \end{array}$$

Minus vor der Klammer ändert beide Vorzeichen. Dann zusammenfassen und durch -1 teilen.

Jetzt $a = -1$ in I* einsetzen, um b zu finden.

$$\begin{array}{l} -1 + b = 1 \quad | +1 \\ b = 2 \end{array}$$

Auf beiden Seiten 1 addieren. Aus III kennen wir bereits $c = 3$.

5 Die gefundenen Zahlen in den Ansatz einsetzen

$$\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(x) = (-1) \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3 \end{array}$$

Setze $a = -1$, $b = 2$ und $c = 3$ ein.

DIE GESUCHTE FUNKTION

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

Kontrolle mit der fertigen Funktion:

$$f(1) = -1 + 2 + 3 = 4 \text{ und } f(0) = 0 + 0 + 3 = 3.$$

$$f'(x) = -2x + 2, \text{ also } f'(1) = -2 + 2 = 0.$$

$$f''(x) = -2 < 0. \text{ Somit ist } H(1 \mid 4) \text{ tatsächlich ein Hochpunkt.}$$

Beispiel 2: Den Text verstehen

Teil 1 von 3 · Wendepunkt, Steigung und einen weiteren Punkt übersetzen

DIE AUFGABE

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat den Wendepunkt **W(0 | 1)**. Dort beträgt ihre Steigung **-3**. Der Graph geht durch **P(1 | -1)**. Bestimme die Funktionsgleichung.

1 Den Ansatz und die Ableitungen aufschreiben

„3. Grades“ bedeutet: Die höchste Potenz ist x^3 . Wir suchen diesmal vier Zahlen: a, b, c und d.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Allgemeiner Ansatz für eine Funktion 3. Grades.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Erste Ableitung: Wir brauchen sie für die Steigung.

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Noch einmal ableiten: Wir brauchen f'' für den Wendepunkt.

2 Die vier Bedingungen aufschreiben

Wendepunkt W(0 | 1): Der Graph geht durch diesen Punkt. Außerdem liegt bei $x = 0$ eine Wendestelle vor. Das sind zwei Bedingungen.

I $f(0) = 1$

Bei $x = 0$ hat der Graph die Höhe 1.

II $f''(0) = 0$

An einer Wendestelle ist die zweite Ableitung 0.

„Dort beträgt die Steigung -3“: „Dort“ bezieht sich auf den Wendepunkt, also auf $x = 0$.

III $f'(0) = -3$

Die Steigung gehört in die erste Ableitung.

Der Graph geht durch P(1 | -1): Der x-Wert ist 1 und der y-Wert ist -1.

IV $f(1) = -1$

Bei $x = 1$ hat der Graph die Höhe -1.

ACHTUNG: WENDEPUNKT IST NICHT GLEICH SATTELPUNKT!

An einem Wendepunkt muss die Steigung nicht 0 sein. Hier ist sie -3. Deshalb lautet Bedingung II **$f''(0) = 0$** , nicht $f'(0) = 0$.

Beispiel 2: Das LGS aufstellen

Teil 2 von 3 · Jede Bedingung vollständig einsetzen

UNSERE FORMELN

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

3 Einsetzen und vereinfachen

I: $f(0) = 1$. Setze $x = 0$ in die Funktion f ein.

$$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1$$

$$0 + 0 + 0 + d = 1$$

$$\text{I} \quad d = 1$$

Alle Terme mit x werden 0. Übrig bleibt d .

II: $f''(0) = 0$. Setze $x = 0$ in die zweite Ableitung ein.

$$6a \cdot 0 + 2b = 0$$

$$\text{II} \quad 2b = 0$$

$6a \cdot 0$ ist 0. Der Term $2b$ bleibt stehen.

III: $f'(0) = -3$. Setze $x = 0$ in die erste Ableitung ein.

$$3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = -3$$

$$0 + 0 + c = -3$$

$$\text{III} \quad c = -3$$

Die beiden ersten Terme werden 0. Übrig bleibt c .

IV: $f(1) = -1$. Setze $x = 1$ in die Funktion f ein.

$$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -1$$

$$\text{IV} \quad a + b + c + d = -1$$

$1^3 = 1$ und $1^2 = 1$. Deshalb bleiben a , b , c und d übrig.

DAS VOLLSTÄNDIGE LINEARE GLEICHUNGSSYSTEM

$$\text{I} \quad d = 1$$

$$\text{II} \quad 2b = 0$$

$$\text{III} \quad c = -3$$

$$\text{IV} \quad a + b + c + d = -1$$

Hier macht $x = 0$ vieles einfacher: Zwei Unbekannte kannst du bereits direkt ablesen. b bekommst du durch eine kurze Umformung. Danach fehlt nur noch a .

Beispiel 2: Das LGS lösen

Teil 3 von 3 · Die bekannten Werte nutzen und die Funktion überprüfen

4 Die Unbekannten nacheinander bestimmen

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad d = 1 \\ \text{III} \quad c = -3 \end{array}$$

Diese beiden Werte kannst du direkt ablesen.

$$\begin{array}{l} \text{II} \quad 2b = 0 \quad | : 2 \\ b = 0 \end{array}$$

Teile auf beiden Seiten durch 2. Auch $0 : 2$ ist 0.

Jetzt $b = 0$, $c = -3$ und $d = 1$ in IV einsetzen. Dann enthält die Gleichung nur noch die Unbekannte a .

$$a + b + c + d = -1$$

Das ist Gleichung IV.

$$a + 0 + (-3) + 1 = -1$$

Setze die drei bekannten Werte ein. Achte auf $c = -3$.

$$\begin{array}{l} a - 2 = -1 \quad | +2 \\ a = 1 \end{array}$$

Fasse $0 - 3 + 1$ zu -2 zusammen. Addiere auf beiden Seiten 2.

5 Die Funktionsgleichung aufschreiben

$$\begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + (-3) \cdot x + 1 \end{array}$$

Setze $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$ und $d = 1$ in den Ansatz ein.

DIE GESUCHTE FUNKTION

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

6 Die Angaben aus dem Text kontrollieren

Die Ableitungen der fertigen Funktion lauten:

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6.$$

$$\begin{array}{l} f(0) = 0 - 0 + 1 = 1 \\ f''(0) = 6 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

Die Höhe und die Wendepunkt-Bedingung passen.

$$\begin{array}{l} f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 \\ f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 \end{array}$$

Auch die Steigung und der weitere Punkt passen.

Nachweis: Zusätzlich ist $f'''(0) = 6 \neq 0$. Damit ist $W(0 \mid 1)$ tatsächlich ein Wendepunkt. Alle Angaben sind erfüllt.