

Waagerechte Asymptoten

Grenzfälle verstehen - nicht nur bei Brüchen

einfach mathe!

7. Wenn der Zählergrad größer ist

Beispiel 3

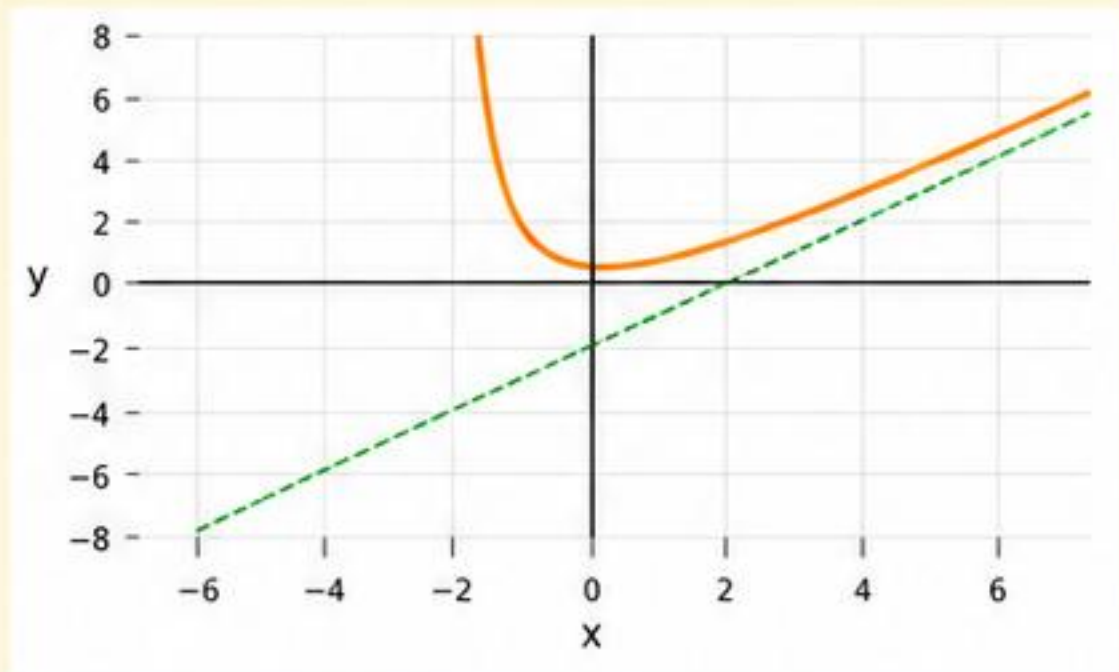
$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$$

1. Kürzen: nicht möglich.
2. Grade: Zähler Grad 2, Nenner Grad 1.
3. Ergebnis: Es gibt keine waagerechte Asymptote.

Durch Polynomdivision erhält man sogar

$$h(x) = x - 2 + \frac{5}{x + 2}$$

Der Graph nähert sich daher einer schiefen Geraden an.



8. Waagerechte Asymptoten gibt es nicht nur bei Brüchen

Beispiel 4

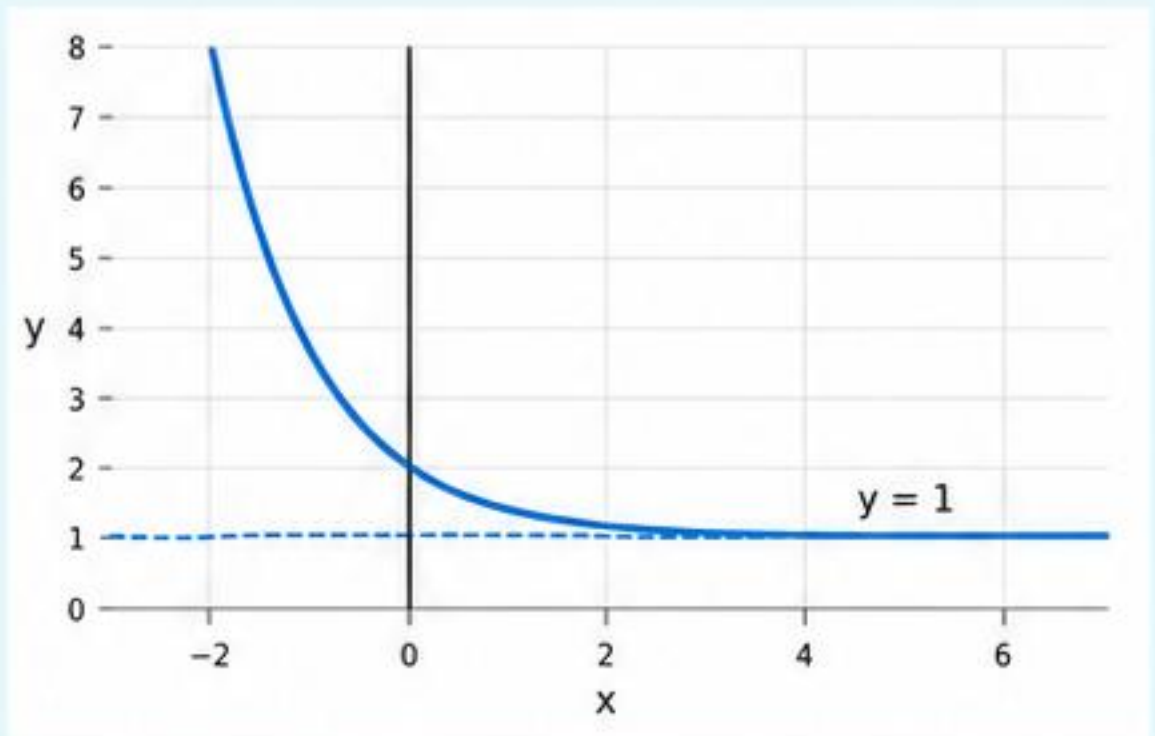
$$k(x) = e^{-x} + 1$$

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt: $e^{-x} \rightarrow 0$. Also nähert sich $k(x)$ dem Wert 1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 1$$

Waagerechte Asymptote: $y = 1$

Hier nur für die Richtung $x \rightarrow +\infty$.



9. Schnellcheck

Das merkst du dir

Gebrochenrational - nach dem Kürzen:

- Grad Z < Grad N $\rightarrow y = 0$
- Grad Z = Grad N $\rightarrow$ Quotient der Leitkoeffizienten
- Grad Z > Grad N $\rightarrow$ keine waagerechte Asymptote

Allgemein:

Wenn für $x \rightarrow +\infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ ein endlicher Grenzwert b entsteht, lautet die waagerechte Asymptote $y = b$.

Waagerechte Asymptoten

gebrochenrationale Funktionen - die wichtigsten Regeln

einfach mathe!

4. Schnellregel bei gebrochenrationalen Funktionen

Bei $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

schaust du nach dem Kürzen auf die höchsten Potenzen von x .

Grad Z < Grad N

Nenner wächst schneller.
Deshalb nähert sich der Bruch 0.
Also ist $y = 0$ die waagerechte Asymptote (das ist die x-Achse).

$$y = 0$$

(x-Achse)

Grad Z = Grad N

Der Grenzwert ist der Quotient der Leitkoeffizienten.

$$y = \frac{a}{b}$$

a = Leitkoeffizient im Zähler, also die Zahl vor der höchsten x -Potenz im Zähler.

b = Leitkoeffizient im Nenner, also die Zahl vor der höchsten x -Potenz im Nenner.

Grad Z > Grad N

Der Zähler wächst schneller als der Nenner.

Es gibt keine waagerechte Asymptote.

Die Funktion ist für $|x|$ sehr groß meistens schief (linear) oder polynomial.

Leitkoeffizient

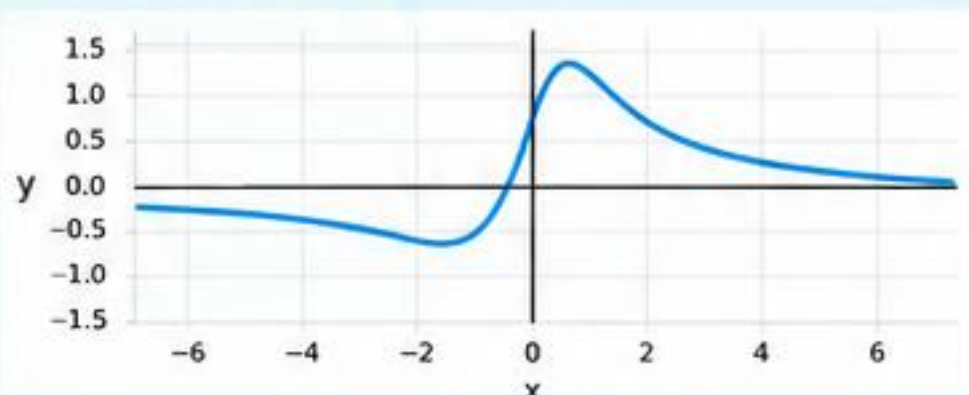
Der Leitkoeffizient ist die Zahl vor der höchsten Potenz von x .

Zum Beispiel: Bei $3x^2 + 2x - 1$ ist der Leitkoeffizient 3, denn 3 steht vor x^2 .

5. Beispiel 1 - Zählergrad kleiner als Nennergrad

Beispiel 1

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$$

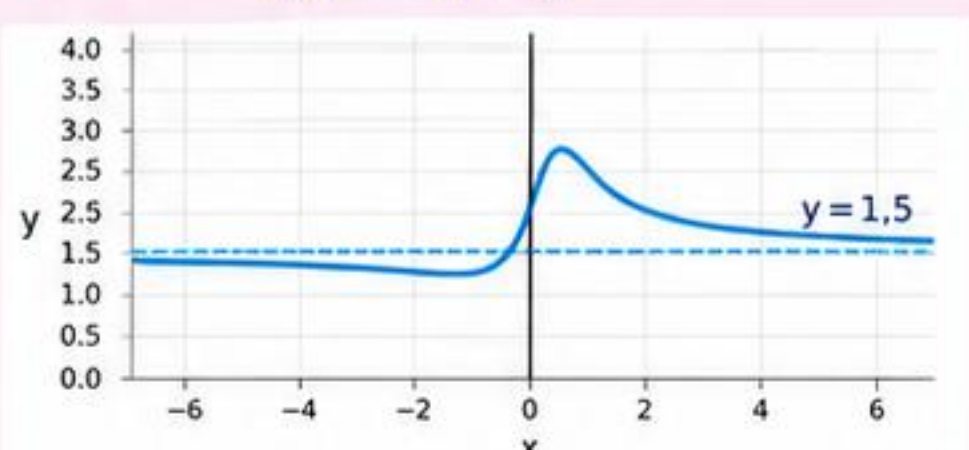


1. Kürzen: nicht möglich.
2. Grade vergleichen: Zähler Grad 1, Nenner Grad 2.
3. Regel: Grad Z < Grad N $\rightarrow$ Grenzwert 0.
4. Ergebnis: $y = 0$ ist die waagerechte Asymptote (das ist die x-Achse).

6. Beispiel 2 - Zählergrad = Nennergrad

Beispiel 2

$$g(x) = \frac{3x^2 + 2}{2x^2 - x + 1}$$



1. Kürzen: nicht möglich.
2. Grade vergleichen: beide Grad 2.
3. Leitkoeffizienten: oben 3, unten 2.
4. Ergebnis: Quotient der Leitkoeffizienten

$$y = \frac{3}{2} = 1,5$$

Die waagerechte Asymptote ist $y = 1,5$.

Waagerechte Asymptoten

verstehen - bestimmen - sicher anwenden

einfach mathe!

Warum geht es?

Eine waagerechte Asymptote beschreibt das Endverhalten eines Graphen: Für sehr große positive oder negative x-Werte nähert sich der Graph einer waagerechten Geraden an.

1. Was ist eine waagerechte Asymptote?

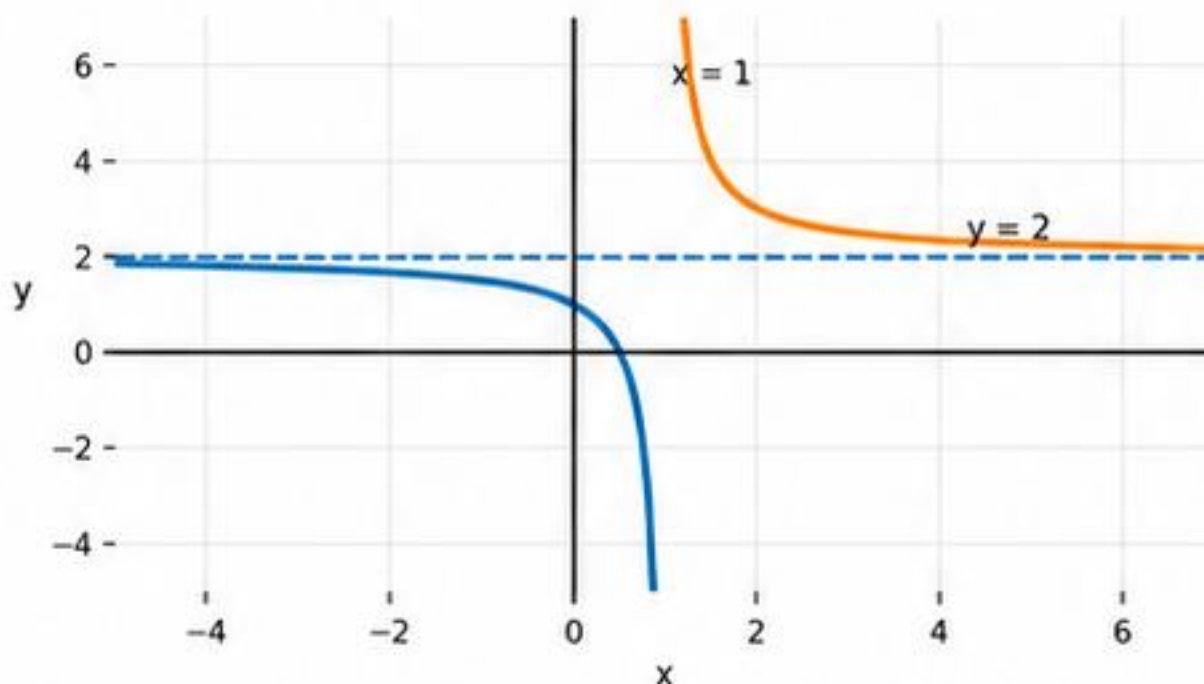
Waagerechte Asymptote

$$y = b$$

Die Gerade $y = b$ ist eine waagerechte Asymptote, wenn sich die Funktionswerte für $x \rightarrow +\infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ einem festen Wert b annähern.

Mathematisch: Ein endlicher Grenzwert b für mindestens eine der beiden Richtungen liefert die Asymptote $y = b$.

2. So sieht das am Graphen aus



Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$$

Für sehr große positive und negative x-Werte wird der Bruchterm immer kleiner.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 2$$

Waagerechte Asymptote: $y = 2$

3. Wichtige Hinweise

Merke

1. Eine waagerechte Asymptote beschreibt nur das Verhalten ganz weit links oder rechts. Der Graph darf die Asymptote zwischendurch schneiden.
2. Es reicht, wenn sich der Graph nur für $x \rightarrow +\infty$ oder nur für $x \rightarrow -\infty$ einem Wert nähert.
3. Die Gleichung einer waagerechten Asymptote hat immer die Form $y = \text{Zahl}$.

Waagerechte Asymptoten

üben - selbst entscheiden - Kurzlösungen kontrollieren

einfach mathe!

10. Aufgaben

A $f(x) = \frac{3}{x-4}$

Bestimme die waagerechte Asymptote.

B $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+5}$

Bestimme die waagerechte Asymptote.

C $h(x) = \frac{4x^2-7}{2x^2+3x+1}$

Bestimme die waagerechte Asymptote.

D $p(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

Gibt es eine waagerechte Asymptote?

E $q(x) = \frac{3x^3+x}{x^3-2}$

Bestimme die waagerechte Asymptote.

F $r(x) = \frac{5x^2-1}{x^2+4}$

Bestimme die waagerechte Asymptote.

G $s(x) = e^{-x} + 2$

Bestimme eine waagerechte Asymptote.

H $t(x) = e^x$

Für welche Richtung gibt es eine waagerechte Asymptote?

11. Kurzlösungen

Kontrolle

A $y = 0$

B $y = 0$

C $y = 2$

D keine waagerechte Asymptote

E $y = 3$

F $y = 5$

G $y = 2$ für $x \rightarrow +\infty$

H $y = 0$ für $x \rightarrow -\infty$

Merke

Waagerechte Asymptote $y = b \Leftrightarrow f(x)$ nähert sich für $x \rightarrow +\infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ einem endlichen Wert b .