

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

einfach mathe!

Grundideen verstehen – Fachbegriffe sicher erklären

negative Exponenten = negative ganze Zahlen

1. Überblick: Was sind Potenzfunktionen?

Eine **Potenzfunktion** hat die Form $f(x) = a \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$.

In diesem Lernzettel betrachten wir Potenzfunktionen **mit negativen Exponenten**, also zum Beispiel x^{-1} , x^{-2} oder x^{-3} .

Ein negativer Exponent bedeutet, dass der entsprechende Faktor in den Nenner rückt.

Beispiele: $x^{-1} = \frac{1}{x}$ $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ $3x^{-3} = \frac{3}{x^3}$

2. Wichtige Fachbegriffe einfach erklärt

Quadranten	Die x-Achse und die y-Achse teilen die Ebene in 4 Bereiche. Diese Bereiche heißen Quadranten .
Symmetrie	Ein Graph ist symmetrisch, wenn er gespiegelt oder gedreht gleich aussieht.
Wertemenge W	Die Wertemenge enthält alle y-Werte, die die Funktion annehmen kann.
Definitionsbereich D	Der Definitionsbereich enthält alle x-Werte, die man einsetzen darf.
Asymptote	Eine Asymptote ist eine Gerade, an die sich ein Graph immer weiter annähert.
Gemeinsame Punkte	Viele Potenzfunktionen gehen durch typische Punkte wie (1 1) und bei ungeraden Fällen oft auch (-1 -1).

3. Warum ist $x = 0$ nicht erlaubt?

Ein Bruch ist eine Division. Zum Beispiel bedeutet $\frac{1}{x}$ dasselbe wie $1 : x$.

Man darf nicht durch 0 teilen. Die Division durch 0 ist nicht erlaubt.

Deshalb ist jeder Term der Form $\frac{1}{x^n}$ für $x = 0$ nicht definiert.

Für Potenzfunktionen mit negativen Exponenten gilt daher immer:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Beispiele:

$$\frac{1}{0} \quad \text{nicht erlaubt}$$

$$\frac{3}{x^2} \quad \text{nur für } x \neq 0$$

Merke

Negative Exponenten bedeuten Bruchschreibweise. Weil im Nenner x steht, ist $x = 0$ nie erlaubt. Deshalb gilt meist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

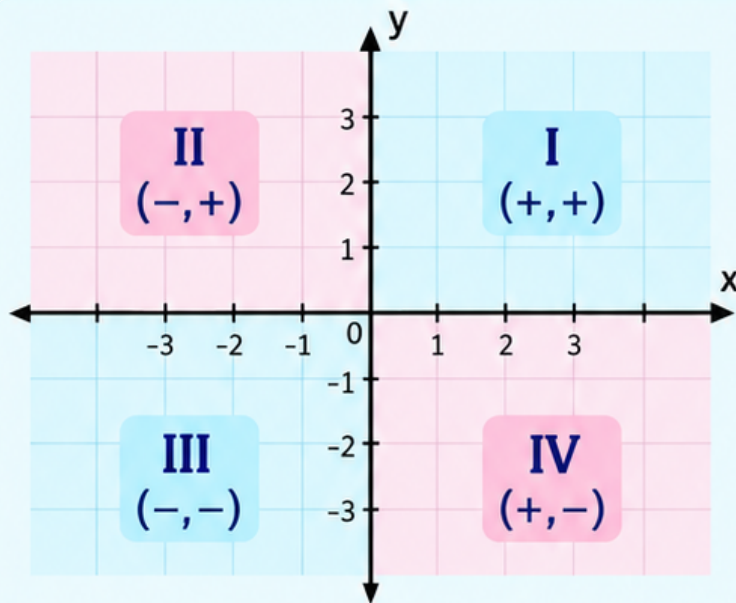
einfach mathe!

Quadranten und erste Graphen verstehen

4. Koordinatensystem und Quadranten

Die **x-Achse** und die **y-Achse** teilen die Ebene in 4 Bereiche. Diese Bereiche heißen **Quadranten**. Ihr Schnittpunkt ist der **Ursprung (0|0)**.

Die **x-Achse** ist waagrecht (nach rechts positiv), die **y-Achse** ist senkrecht (nach oben positiv).



Was bedeuten (+,+) usw.?

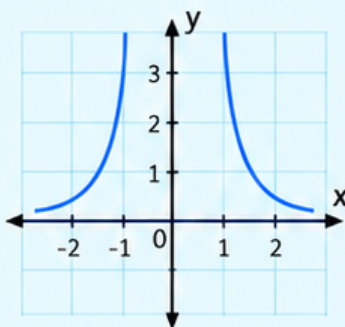
- (+,+)** x-Koordinate positiv, y-Koordinate positiv → Quadrant I
- (-,+)** x-Koordinate negativ, y-Koordinate positiv → Quadrant II
- (-,-)** x-Koordinate negativ, y-Koordinate negativ → Quadrant III
- (+,-)** x-Koordinate positiv, y-Koordinate negativ → Quadrant IV

Merke: Bei (x|y) steht zuerst x, dann y.

5. Was bedeutet das für negative Exponenten?

Gerader negativer Exponent

$$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$



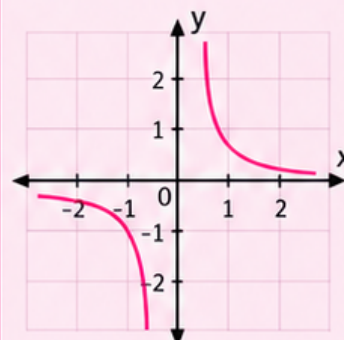
Der Graph hat nur positive y-Werte und ist bei $x = 0$ nicht definiert.

Er verläuft in den Quadranten I und II und geht durch die Punkte $(-1|1)$ und $(1|1)$.

Quadranten: I und II

Ungerader negativer Exponent

$$g(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$



Das Vorzeichen von x bleibt bei den y-Werten erhalten.

Für $x > 0$ ist y positiv, für $x < 0$ ist y negativ.

Der Graph ist bei $x = 0$ nicht definiert und geht durch $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

Quadranten: I und III

Merke

Negative Exponenten führen meist zu zwei getrennten Ästen.
 $x = 0$ ist ausgeschlossen, weil man nicht durch 0 teilen darf.

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Symmetrie allgemein prüfen

einfach mathe!

negative Exponenten = negative ganze Zahlen

6. Symmetrie erkennen – immer allgemein prüfen

Die Symmetrie einer Funktion sollte man **nicht** nur an ein paar einzelnen Punkten überprüfen, sondern **immer allgemein** mit den **Symmetrieregeln**. Nur so ist sicher, dass die Aussage für alle x -Werte gilt.

Achsensymmetrie zur y -Achse:

$$f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$f(-x) = -f(x)$$

So gehst du vor

- 1 Linke Seite bilden und vereinfachen: $f(-x)$
- 2 Rechte Seite bilden und vereinfachen: $f(x)$ oder $-f(x)$
- 3 Vergleichen und entscheiden.

Beispiel 1 – gerader negativer Exponent

$$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

1 Linke Seite:

$$f(-x) = (-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

2 Rechte Seite:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

3 Vergleich:

$$f(-x) = f(x)$$

Also achsensymmetrisch zur y -Achse.

Beispiel 2 – ungerader negativer Exponent

$$g(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

1 Linke Seite:

$$g(-x) = (-x)^{-3} = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}$$

2 Rechte Seite:

$$-g(x) = -\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^3}$$

3 Vergleich:

$$g(-x) = -g(x)$$

Also punktsymmetrisch zum Ursprung.

Merke

Gerader negativer Exponent $\rightarrow y$ -Achsen-Symmetrie.

Ungerader negativer Exponent $\rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung.

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

einfach mathe!

Definitionsbereich, Wertemenge und Asymptoten

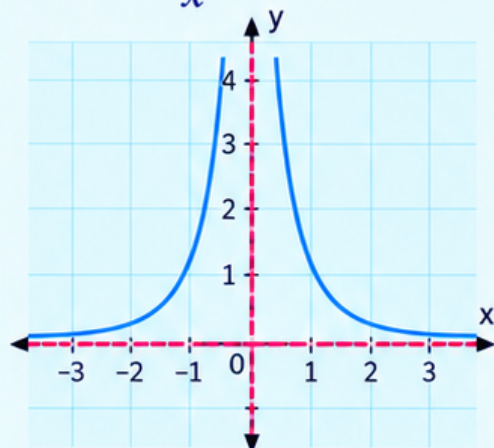
negative Exponenten = negative ganze Zahlen

7. Wichtige Eigenschaften im Überblick

Eigenschaft	gerader negativer Exponent	ungerader negativer Exponent
Verlauf / Quadranten	I und II	I und III
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
Symmetrieregeln	$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$
Definitionsbereich D	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertemenge W	$W =]0; +\infty[$ bzw. $y > 0$	$W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Gemeinsame Punkte	$(-1 1), (1 1)$	$(-1 -1), (1 1)$
Asymptoten	x-Achse und y-Achse	x-Achse und y-Achse
Verhalten nahe $x = 0$	auf beiden Seiten nach $+\infty$	links nach $-\infty$, rechts nach $+\infty$

Graph einer Potenzfunktion mit geradem negativen Exponenten

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

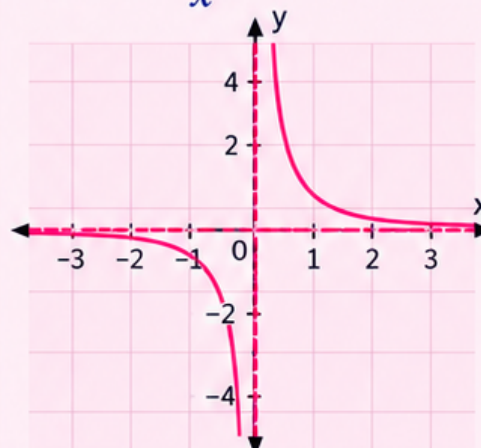


senkrechte Asymptote:
y-Achse
($x = 0$)

waagerechte Asymptote:
x-Achse
($y = 0$)

Graph einer Potenzfunktion mit ungeradem negativen Exponenten

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$



senkrechte Asymptote:
y-Achse
($x = 0$)

waagerechte Asymptote:
x-Achse
($y = 0$)

Merke

Bei negativen Exponenten ist $x = 0$ **ausgeschlossen**.

Deshalb entsteht an der y-Achse eine **senkrechte Asymptote**.

Für große $|x|$ nähern sich die Funktionswerte 0 an, deshalb ist die x-Achse eine **waagerechte Asymptote**.

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

einfach mathe!

Bruchschreibweise und Einfluss des Exponenten

negative Exponenten = negative ganze Zahlen

8. Bruchschreibweise verstehen

Ein Bruch ist nichts anderes als eine **Geteiltrechnung**. $\frac{1}{x}$ bedeutet $1 : x$.
Daher darf man x **nicht 0** setzen, denn eine Division durch 0 ist nicht erlaubt.

Wenn ein Faktor aus dem Zähler in den Nenner rückt, wird der **Exponent negativ**.
Kommt er aus dem Nenner nach oben, wird der **Exponent positiv**.

Von der Potenzschreibweise zur Bruchschreibweise

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$3x^{-4} = \frac{3}{x^4}$$

Von der Bruchschreibweise zur Potenzschreibweise

$$\frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$$

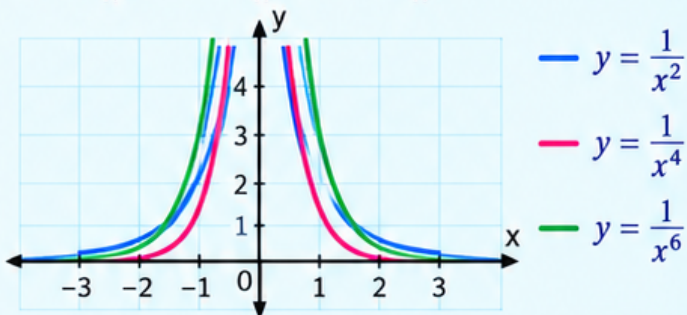
$$\frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$$

$$\frac{1}{2x^5} = \frac{1}{2} \cdot x^{-5}$$

9. Was ändert der Exponent am Graphen?

Gerade negative Exponenten

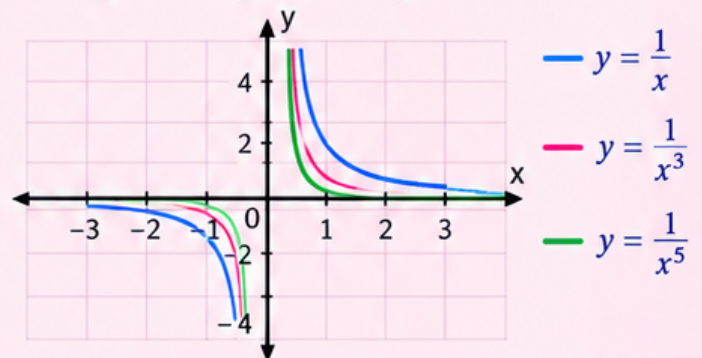
$$y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x^4}, \quad y = \frac{1}{x^6}$$



- Alle Funktionswerte sind positiv.
- Die Graphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Es gibt die senkrechte Asymptote $x = 0$ und die waagerechte Asymptote $y = 0$.
- Je größer der Exponent, desto steiler verläuft der Graph in der Nähe von $x = 0$ und desto flacher ist er für große $|x|$.

Ungerade negative Exponenten

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^3}, \quad y = \frac{1}{x^5}$$



- Alle Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Es gibt die senkrechte Asymptote $x = 0$ und die waagerechte Asymptote $y = 0$.
- Je größer der Exponent, desto steiler verläuft der Graph in der Nähe von $x = 0$.

Merke

Größerer Betrag des negativen Exponenten $\rightarrow$ näher an der x -Achse für große $|x|$, aber steiler in der Nähe von $x = 0$.

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Viele Beispiele Schritt für Schritt

einfach mathe!

negative Exponenten = negative ganze Zahlen

10. Beispiele

Beispiel 1: $f(x) = x^{-2}$

Bruchschreibweise	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
Definitionsbereich D	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Exponent	Der Exponent ist gerade ($n = -2$).
Symmetrie	Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Wertemenge W	$W =]0; +\infty[$ (alle y-Werte sind positiv)
Asymptoten	Die x-Achse ($y = 0$) und die y-Achse ($x = 0$) sind Asymptoten.

Beispiel 2: $g(x) = x^{-1}$

Bruchschreibweise	$g(x) = \frac{1}{x}$
Definitionsbereich D	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Exponent	Der Exponent ist ungerade ($n = -1$).
Symmetrie	Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
Wertemenge W	$W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (alle reellen y-Werte außer 0)
Asymptoten	Die x-Achse ($y = 0$) und die y-Achse ($x = 0$) sind Asymptoten.

Beispiel 3: $h(x) = 3x^{-4}$

Bruchschreibweise	$h(x) = \frac{3}{x^4}$
Definitionsbereich D	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Exponent	Der Exponent ist gerade ($n = -4$).
Symmetrie	Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
Wertemenge W	$W =]0; +\infty[$ (alle y-Werte sind positiv)
Besondere Punkte	$h(1) = 3$ und $h(-1) = 3$ (gleiche y-Werte bei $x = 1$ und $x = -1$)
Lage im Koordinatensystem	Der Graph liegt in Quadrant I und II (oberhalb der x-Achse).

Beispiel 4: $p(x) = -2x^{-3}$

Bruchschreibweise	$p(x) = -\frac{2}{x^3}$
Definitionsbereich D	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Exponent	Der Exponent ist ungerade ($n = -3$).
Symmetrie	Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
Vorzeichen	Wegen des Minuszeichens liegen die Äste in Quadrant II und IV.
Wertemenge W	$W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (alle reellen y-Werte außer 0)
Asymptoten	Die x-Achse ($y = 0$) und die y-Achse ($x = 0$) sind Asymptoten.

So erkennst du die Eigenschaften

- 1 In Bruchschreibweise umformen.
- 2 Definitionsbereich D prüfen: Ist $x = 0$ verboten?
- 3 Gerade oder ungerade Exponent? → daraus folgt die Symmetrie.
- 4 Vorzeichen vor dem Term beachten. → das bestimmt, in welchen Quadranten der Graph liegt.
- 5 Wertemenge W, Symmetrie und Asymptoten angeben.

Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Mini-Training und Kurzlösungen

einfach mathe!

11. Mini-Training

A $f(x) = x^{-2}$

Gib die Bruchschreibweise an und bestimme den Definitionsbereich D und die Wertemenge W .

B $g(x) = x^{-1}$

Gib die Symmetrie an und nenne die Quadranten, in denen der Graph verläuft.

C $h(x) = 4x^{-3}$

Schreibe die Funktion als Bruch und nenne die Asymptoten des Graphen.

D $p(x) = \frac{5}{x^4}$

Ist die Funktion gerade oder ungerade? Was folgt daraus für die Symmetrie des Graphen?

E $q(x) = -\frac{1}{x}$

In welchen Quadranten liegen die Äste des Graphen?

F $r(x) = \frac{2}{x^2}$

Nenne den Definitionsbereich D , die Wertemenge W und die gemeinsamen Punkte mit den Graphen bei $x = \pm 1$.

G $s(x) = \frac{1}{x^5}$

Welche Asymptoten hat der Graph?

H $t(x) = \frac{3}{x^6}$

Erkläre kurz, warum $x = 0$ nicht erlaubt ist.

12. Kurzlösungen

A $\frac{1}{x^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W =]0; +\infty[$

B punktsymmetrisch zum Ursprung, Quadranten I und III

C $\frac{4}{x^3}$, Asymptoten $x = 0$ und $y = 0$

D gerader negativer Exponent $\rightarrow$ achsensymmetrisch zur y -Achse

E Quadranten II und IV

F $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W =]0; +\infty[$, Punkte $(-1|2)$ und $(1|2)$

G x -Achse und y -Achse

H Weil $\frac{3}{x^6}$ eine Division durch x enthält und Division durch 0 nicht erlaubt ist.

Merke

Erst in Bruchschreibweise denken $\rightarrow$ dann erkennst du Definitionsbereich, Symmetrie und Asymptoten viel leichter.