Einsetzungsverfahren

Lineare Gleichungssysteme sinnvoll lösen

einfach mathe!

Warum geht es? Beim Einsetzungsverfahren löst du eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt diesen Ausdruck in die andere Gleichung ein. So bleibt nur noch eine Variable übrig.

Wann ist das Einsetzungsverfahren sinnvoll?

Sehr gut geeignet
Wenn eine Gleichung schon nach x oder y aufgelöst ist.

Auch sinnvoll
Wenn vor einer Variablen 1 oder -1 steht, weil man leicht freistellen kann.

Eher unpraktisch
Wenn beide Variablen ungünstige Koeffizienten haben und dadurch schnell Brüche entstehen.

So gehst du vor

1. **Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen.**
2. **Den erhaltenen Ausdruck in die andere Gleichung einsetzen.**
3. **Die Gleichung mit nur einer Variablen lösen.**
4. **Den gefundenen Wert zurück einsetzen und die zweite Variable berechnen.**
5. **Lösungsmenge angeben.**

Wichtig! **Wichtig beim Einsetzen: Klammern nicht vergessen!**
Wenn du z. B. $x = 6 - 2y$ in $2x - 3y = 5$ einsetzt, musst du $2(6 - 2y) - 3y$ schreiben. Die Klammer ist wichtig, weil der ganze Ausdruck für x eingesetzt wird.

Beispiel 1

I $x + 2y = 6$

II $2x - 3y = 5$

I nach x auflösen ist hier sinnvoll, weil vor x die 1 steht. So bekommst du schnell $x = 6 - 2y$ und vermeidest unnötige Brüche.

1 Gleichung I nach x auflösen

$x + 2y = 6 \quad | -2y$

$\mathbf{x = 6 - 2y}$

2 In Gleichung II einsetzen

$2x - 3y = 5$

$2(6 - 2y) - 3y = 5$

$12 - 4y - 3y = 5$

$12 - 7y = 5$

$-7y = -7$

$\mathbf{y = 1}$

3 y zurück in I einsetzen

$x = 6 - 2 \cdot 1$

$\mathbf{x = 4}$

4 Lösungsmenge angeben

$$\mathbf{L = \{(4 \mid 1)\}}$$

Probe: Beide Gleichungen sind mit $x = 4$ und $y = 1$ erfüllt.

Einsetzungsverfahren

Zweites Beispiel – gleiche Methode, andere Buchstaben

einfach mathe!

Beispiel 2 komplett vorgerechnet

Beispiel 2

I $2a + b = 10$

II $3a + 4b = 7$

! **Gleichung I nach b aufzulösen** ist sinnvoll, weil vor b die 1 steht. So entsteht sofort **b = 10 - 2a** und wir müssen nicht durch eine Zahl teilen.

1 Gleichung I nach b auflösen

$2a + b = 10 \quad | -2a$

$\mathbf{b = 10 - 2a}$

2 In Gleichung II einsetzen

$3a + 4b = 7$

$3a + 4\mathbf{(10 - 2a)} = 7$

$3a + 40 - 8a = 7$

3 Gleichung mit nur einer Variablen lösen

$-5a + 40 = 7 \quad | -40$

$-5a = -33 \quad | :(-5)$

$\mathbf{a = 33/5 = 6,6}$

4 a zurück in I einsetzen und b berechnen

$b = 10 - 2a$

$b = 10 - 2 \cdot 33/5$

$b = 10 - 66/5$

$b = 50/5 - 66/5$

$\mathbf{b = -16/5 = -3,2}$

5 Lösungsmenge angeben

$\mathbf{L = \{(33/5 \mid -16/5)\} = \{(6,6 \mid -3,2)\}}$

! **Auch hier gilt:**

Beim Einsetzen müssen Klammern gesetzt werden, weil für b der ganze Ausdruck 10 - 2a eingesetzt wird.

Merke

Das Einsetzungsverfahren funktioniert mit beliebigen Variablennamen. Entscheidend ist nur: eine Variable freistellen, den Ausdruck einsetzen und anschließend zurück einsetzen.

Einsetzungsverfahren

Wie viele Lösungen kann ein LGS haben?

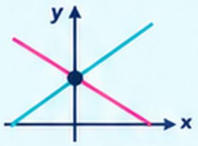
einfach mathe!

Worum geht es? Am Ende erkennst du an der letzten Aussage, welcher Fall vorliegt. Geometrisch geht es um zwei Geraden: Sie schneiden sich einmal, sind parallel verschieden oder liegen genau aufeinander.

Ein LGS kann 1, 0 oder unendlich viele Lösungen haben

1 Genau eine Lösung

Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
Deshalb gibt es genau ein Zahlenpaar, das beide Gleichungen erfüllt.



Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.

Beispiel

I $x + y = 5$

II $x - y = 1$

1 Gleichung I nach y auflösen

$x + y = 5 \quad | - x$

$y = 5 - x$

2 In Gleichung II einsetzen

$x - (5 - x) = 1$

$x - 5 + x = 1$

$2x - 5 = 1$

$2x = 6 \quad | :2$

$x = 3$

3 Rückeinsetzen und Lösung angeben

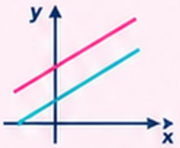
$y = 5 - 3 = 2$

$L = \{(3 \mid 2)\}$

Hinweis: Hier kommt eine eindeutige Zahl heraus – also genau eine Lösung.

2 Keine Lösung

Die beiden Geraden sind parallel und verschieden.
Deshalb gibt es keinen Schnittpunkt und kein gemeinsames Zahlenpaar.



Die Geraden sind parallel und verschieden.

Beispiel

I $x + y = 2$

II $2x + 2y = 6$

1 Gleichung I nach y auflösen

$x + y = 2 \quad | - x$

$y = 2 - x$

2 In Gleichung II einsetzen

$2x + 2(2 - x) = 6$

$2x + 4 - 2x = 6$

$4 = 6$

3 Ergebnis und Lösung

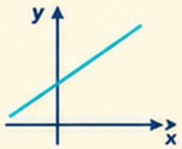
Das ist ein Widerspruch.
Es gibt keine Lösung.

$L = \emptyset$

Hinweis: Wenn am Ende ein Widerspruch entsteht, gibt es keine Lösung.

3 Unendlich viele Lösungen

Beide Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade.
Deshalb passen unendlich viele Zahlenpaare.



Die Geraden liegen genau aufeinander.

Beispiel

I $x + y = 2$

II $2x + 2y = 4$

1 Gleichung I nach y auflösen

$x + y = 2 \quad | - x$

$y = 2 - x$

2 In Gleichung II einsetzen

$2x + 2(2 - x) = 4$

$2x + 4 - 2x = 4$

$4 = 4$

3 Ergebnis und Lösung

Das ist eine wahre Aussage.
Es gibt unendlich viele Lösungen.

z.B. $L = \{(x \mid 2 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Hinweis: Wenn am Ende eine immer wahre Aussage entsteht, gibt es unendlich viele Lösungen.

Schnellcheck Widerspruch → keine Lösung. Echte Zahl herausbekommen → genau eine Lösung. Wahre Aussage wie 4 = 4 → unendlich viele Lösungen.