Gaußverfahren

Lineare Gleichungssysteme systematisch lösen

einfach mathe!

Worum geht es? Das Gaußverfahren löst ein lineares Gleichungssystem und beruht im Wesentlichen auf dem **Additionsverfahren**. Ziel ist, unter der Diagonalen Schritt für Schritt Nullen zu erzeugen.

1. Ziel des Gaußverfahrens

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Ein **Koeffizient** ist die Zahl vor einer Variablen. Aus dem LGS schreiben wir nur die Koeffizienten und rechts die Ergebniszahlen auf.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Zielmatrix

Unter der Diagonalen stehen nur noch Nullen. Danach kann man von unten nach oben lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \end{array}\right)$$

2. Zulässige Rechnungen

Eine Zeile

Mit einer Zahl multiplizieren oder durch eine Zahl dividieren.

Zwei Zeilen

Addieren oder subtrahieren.

Zeilen

Zwei Zeilen dürfen vertauscht werden.

3. Die Schritte

1. **LGS als erweiterte Koeffizientenmatrix aufschreiben.**
2. **In der 1. Spalte unter dem ersten Eintrag Nullen vorbereiten:** möglichst kleines gemeinsames Vielfaches suchen und passende Gegenwerte erzeugen.
3. **Zeilen addieren oder subtrahieren,** sodass in Zeile 2 und 3 die erste Spalte 0 wird.
4. **In der 2. Spalte unten eine Null erzeugen:** jetzt nur mit Zeile 2 und 3 arbeiten.
5. **Von unten nach oben lösen:** zuerst z, dann y, dann x.
6. **Lösungsmenge angeben.**

Gaußverfahren

Beispiel - erste Spalte bearbeiten

einfach mathe!

4. Beispiel: Ausgangslage

Gegeben ist das LGS:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 2x - 4y + 5z = 3 \\ \text{II} \quad & 3x + 3y + 7z = 13 \\ \text{III} \quad & 4x - 2y - 3z = -1 \end{aligned}$$

Schritt 1: Matrix aufschreiben

Die Spalten gehören zu x, y und z. Rechts vom Strich stehen die Ergebniszahlen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Nullen in Spalte 1 vorbereiten

In der ersten Spalte stehen 2, 3 und 4. Unter der obersten Zahl sollen zwei Nullen entstehen. Wir suchen ein möglichst kleines gemeinsames Vielfaches: **12**.

$2 \cdot 6 = 12$	$3 \cdot 4 = 12$	$4 \cdot 3 = 12$

Die obere Zahl bringen wir auf **-12**; die beiden darunter auf **+12**. Dann verschwinden sie beim Addieren.

I · (-6)	(2, -4, 5 | 3) → (-12, 24, -30 | -18)
II · 4	(3, 3, 7 | 13) → (12, 12, 28 | 52)
III · 3	(4, -2, -3 | -1) → (12, -6, -9 | -3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 12 & 12 & 28 & 52 \\ 12 & -6 & -9 & -3 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Addieren

I bleibt	(-12, 24, -30 | -18)
I + II	(0, 36, -2 | 34)
I + III	(0, 18, -39 | -21)

Schritt 3: Ergebnis nach der ersten Spalte

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ \mathbf{0} & 36 & -2 & 34 \\ \mathbf{0} & 18 & -39 & -21 \end{array}\right)$$

Wichtig Die Nullen in der ersten Spalte bleiben jetzt erhalten. Für die nächste Null benutzen wir nur noch **Zeile 2 und Zeile 3**.

Schritt 4: Null in der 2. Spalte erzeugen

In der zweiten Spalte stehen 36 und 18. Wir wollen gleiche Zahlen mit unterschiedlichem Vorzeichen. Deshalb bringen wir 18 auf -36:

$18 \cdot (-2) = -36$

III · (-2) (0, 18, -39 | -21) → (0, -36, 78 | 42)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ 0 & 36 & -2 & 34 \\ 0 & -36 & 78 & 42 \end{array}\right)$$

Jetzt addieren wir **II + III**. In der zweiten Spalte gilt 36 + (-36) = 0.

II + III (0, 36, -2 | 34) + (0, -36, 78 | 42) = (0, 0, 76 | 76)

Zielmatrix erreicht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 24 & -30 & -18 \\ \mathbf{0} & 36 & -2 & 34 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 76 & 76 \end{array}\right)$$

Jetzt ist das Ziel des Gaußverfahrens erreicht: Unter der Diagonalen stehen nur noch Nullen. Ab hier wird von unten nach oben gelöst.

Gaußverfahren

Von unten nach oben lösen

einfach mathe!

Schritt 5: Variablen berechnen

Zeile III: z berechnen

$$76z = 76 \quad | :76$$
$$z = 1$$

Zeile II: z einsetzen und y berechnen

$$36y - 2z = 34 \quad | z = 1$$
$$36y - 2 = 34 \quad | +2$$
$$36y = 36 \quad | :36$$
$$y = 1$$

Zeile I: y und z einsetzen und x berechnen

$$-12x + 24y - 30z = -18 \quad | y = z = 1$$
$$-12x + 24 - 30 = -18$$
$$-12x - 6 = -18 \quad | +6$$
$$-12x = -12 \quad | :(-12)$$
$$x = 1$$

Schritt 6: Lösungsmenge angeben

$$L = \{1; 1; 1\}$$

Schnellcheck

Beim Umformen

Eine ganze Zeile wird immer vollständig mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Beim Addieren

Einträge derselben Spalte werden miteinander addiert. Ziel: eine Variable fällt weg.

Beim Weiterarbeiten

Bereits erzeugte Nullen möglichst erhalten und Spalte für Spalte vorgehen.

Am Ende

Von der letzten Zeile nach oben arbeiten und die gefundenen Werte einsetzen.

Gaußverfahren

Lösungsanzahl und Mini-Training

einfach mathe!

5. Anzahl an Lösungen eines LGS

Merke **Nach dem Vereinfachen bzw. sobald die Zielmatrix mit Nullen unter der Diagonalen erreicht ist, schaust du besonders auf die letzte Zeile.** An ihr erkennst du, ob das LGS genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzt.

1 Lösung

$$0 \quad 0 \quad \text{Zahl}_1 \mid \text{Zahl}_2$$

$\text{Zahl}_1 \neq 0$
Dann entsteht z. B. **$\text{Zahl}_1 \cdot z = \text{Zahl}_2$**.
Die letzte Variable lässt sich eindeutig berechnen → **genau eine Lösung**.

keine Lösung

$$0 \quad 0 \quad 0 \mid \text{Zahl}$$

Zahl ≠ 0
Daraus wird z. B. **0 = 5**. Das ist eine unwahre Aussage bzw. ein Widerspruch → **keine Lösung**.

unendlich viele

$$0 \quad 0 \quad 0 \mid 0$$

Daraus wird **0 = 0**. Das ist immer wahr. Eine Gleichung liefert also keine neue Einschränkung → **unendlich viele Lösungen**.

6. Mini-Training aus der Vorlage

Berechne die Lösung dieses LGS mithilfe des Gaußverfahrens:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad x + y - 2z = 7 \\ &\text{II} \quad 3x - y + z = 2 \\ &\text{III} \quad 2x + 3y + 5z = 8 \end{aligned}$$

Arbeite genau wie im Beispiel: Matrix aufschreiben → erste Spalte → zweite Spalte → von unten nach oben lösen.

7. Ablauf auf einen Blick

1. Matrix aufschreiben.
2. Erste Spalte unten auf 0 bringen.
3. Zweite Spalte unten auf 0 bringen.
4. Von unten nach oben lösen.
5. Lösungsmenge angeben.