

Lösungen zum Aufgabenblatt: Integrale – drei Typen

Aufgabe 1 – Unbestimmtes Integral

a) $\int (-x^3 + 4x^2 - 5) dx$

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int (-x^3 + 4x^2 - 5) dx &= \int (-x^3 + 4x^2 - 5) dx && \text{Exponenten sind sichtbar} \\ &= -\frac{1}{3+1}x^{3+1} + \frac{4}{2+1}x^{2+1} - 5x + C && \text{Potenzregel anwenden} \\ &= -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + C \\ &= \boxed{-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + C}\end{aligned}$$

b) $\int (3x^2 - 2x + 7) dx$

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int (3x^2 - 2x + 7) dx &= \int (3x^2 - 2x^1 + 7) dx && \text{Exponenten markieren} \\ &= \frac{3}{2+1}x^{2+1} - \frac{2}{1+1}x^{1+1} + 7x + C && \text{Potenzregel anwenden} \\ &= x^3 - x^2 + 7x + C \\ &= \boxed{x^3 - x^2 + 7x + C}\end{aligned}$$

c) $\int (5e^{2x} - 4x) dx$

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int (5e^{2x} - 4x) dx &= \int (5e^{2x} - 4x^1) dx && \text{Exponenten markieren} \\ &= 5 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{4}{1+1}x^{1+1} + C && \text{Regeln anwenden} \\ &= \frac{5}{2}e^{2x} - 2x^2 + C \\ &= \boxed{\frac{5}{2}e^{2x} - 2x^2 + C}\end{aligned}$$

Aufgabe 2 – Bestimmtes Integral

a) $\int_{-2}^1 (x^2 + 2x + 3) dx$

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 (x^2 + 2x + 3) dx &= \int_{-2}^1 (x^2 + 2x^1 + 3) dx && \text{Exponenten markieren} \\&= \left(\frac{1}{2+1} x^{2+1} + \frac{2}{1+1} x^{1+1} + 3x \right) \Big|_{-2}^1 && \text{Stammfunktion bilden} \\&= \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 + 3x \right) \Big|_{-2}^1 \\&= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 + 3 \cdot 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 3 \cdot (-2) \right) && \text{„obere“ – „untere“ Grenze} \\&= \left(\frac{1}{3} + 1 + 3 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 4 - 6 \right) \\&= \left(\frac{1}{3} + 4 \right) - \left(\frac{-8}{3} - 2 \right) \\&= \frac{13}{3} - \left(-\frac{14}{3} \right) \\&= \frac{13}{3} + \frac{14}{3} \\&= \frac{27}{3} \\&= 9 \\&= \boxed{9}\end{aligned}$$

b) $\int_0^2 (4x^3 - 1) dx$

Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (4x^3 - 1) dx &= \int_0^2 (4x^3 - 1) dx && \text{Exponenten sichtbar} \\&= \left(\frac{4}{3+1} x^{3+1} - 1 \cdot x \right) \Big|_0^2 && \text{Stammfunktion bilden} \\&= (x^4 - x) \Big|_0^2 \\&= (2^4 - 2) - (0^4 - 0) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“} \\&= 16 - 2 - 0 \\&= 14 \\&= \boxed{14}\end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_0^1 3e^{2x-1} dx$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_0^1 3e^{2x-1} dx &= \int_0^1 3e^{2 \cdot x - 1} dx \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} e^{2x-1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2} e^{2x-1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{2} e^{2 \cdot 1 - 1} - \frac{3}{2} e^{2 \cdot 0 - 1} \\ &= \frac{3}{2} e^1 - \frac{3}{2} e^{-1} \\ &= \frac{3}{2} (e - e^{-1}) \\ &= \boxed{\frac{3}{2} (e - e^{-1})} \end{aligned}$$

Exponent als $2 \cdot x - 1$

$$\text{Regel } \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$$

„obere Grenze“ – „untere Grenze“

Aufgabe 3 – Uneigentliches Integral

$$\text{a) } \int_0^\infty 3e^{-2x} dx$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 3e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 3e^{-2x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(3 \cdot \frac{1}{-2} e^{-2x} \Big|_0^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2} e^{-2x} \Big|_0^b \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2} e^{-2b} - \left(-\frac{3}{2} e^{-2 \cdot 0} \right) \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2} e^{-2b} + \frac{3}{2} e^0 \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2} e^{-2b} + \frac{3}{2} \right) \\ &= 0 + \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Limes einführen

$$\text{Regel } \int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx}$$

„obere Grenze“ – „untere Grenze“

$$\boxed{\int_0^\infty 3e^{-2x} dx = \frac{3}{2} \text{ (Integral konvergiert)}}$$

b) $\int_1^{\infty} \frac{5}{x^3} dx$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{5}{x^3} dx &= \int_1^{\infty} 5x^{-3} dx && \text{als Potenz schreiben} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b 5x^{-3} dx && \text{Limes einführen} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(5 \cdot \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \Big|_1^b \right) && \text{Potenzregel} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(5 \cdot \frac{1}{-2} x^{-2} \Big|_1^b \right) \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{2} x^{-2} \Big|_1^b \right) \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \Big|_1^b \right) && \text{Regel } x^{-n} = \frac{1}{x^n} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{b^2} - \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1^2} \right) \right) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{2b^2} + \frac{5}{2} \right) \\
 &= 0 + \frac{5}{2} \\
 &= \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{5}{x^3} dx = \frac{5}{2} \text{ (Integral konvergiert)}$$

c) $\int_{-\infty}^0 2e^x dx$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 2e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 2e^x dx && \text{Limes einführen} \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(2e^x \Big|_a^0 \right) && \text{Regel } \int e^x dx = e^x + C \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (2e^0 - 2e^a) && \text{„obere Grenze“ – „untere Grenze“} \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (2 - 2e^a) \\
 &= 2 - 0 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^0 2e^x dx = 2 \text{ (Integral konvergiert)}$$