

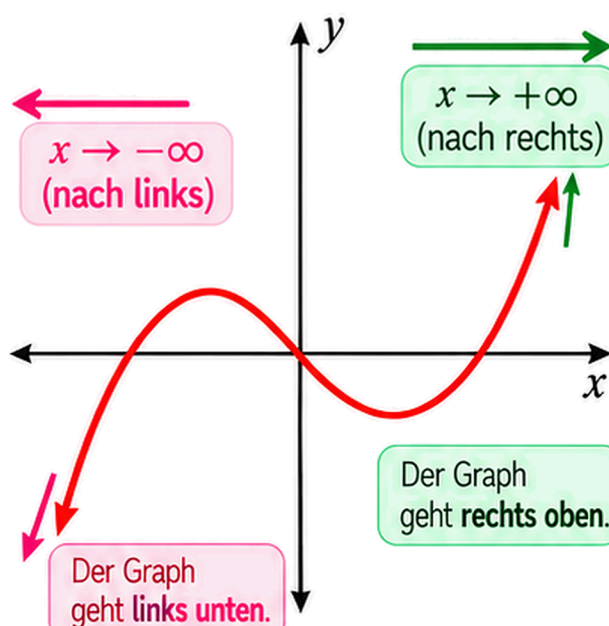
Grenzwertverhalten bei ganzrationalen Funktionen

Leserichtung, Bedeutung und grafische Interpretation

einfach mathe!

1. Was bedeutet Grenzwertverhalten?

- Das Grenzwertverhalten beschreibt, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ für **sehr große** oder **sehr kleine x -Werte** verhalten.
- Dabei betrachten wir die **Höhe des Graphen** an den beiden „Enden“ (rechts und links).
- Es geht also nicht um einzelne Funktionswerte, sondern um das Verhalten für **immer größere** bzw. **immer kleinere x -Werte**.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Der Graph geht **rechts oben**.

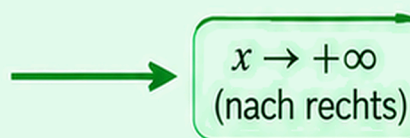
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Der Graph geht **links unten**.

Merke $\lim = \text{Grenzwert}$

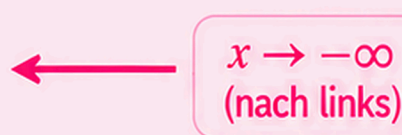
2. So liest du die Schreibweise richtig

- $x \rightarrow +\infty$ bedeutet:
Du gehst auf der x -Achse **nach rechts**.



$\lim_{x \rightarrow +\infty} = L$ Der Graph nähert sich **rechts** dem Wert L (L kann auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein).

- $x \rightarrow -\infty$ bedeutet:
Du gehst auf der x -Achse **nach links**.



$\lim_{x \rightarrow -\infty} = L$ Der Graph nähert sich **links** dem Wert L (L kann auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein).

3. Beispiel: Grenzwertverhalten am Graphen ablesen

- Betrachte den rechten Teil des Graphen (sehr große x -Werte).
- Bestimme, ob der Graph nach oben oder nach unten geht.
- Wiederhole dies für den linken Teil des Graphen (sehr kleine x -Werte).
- Lies daraus die Grenzwerte ab.

Zu dem Graphen oben gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Der Graph geht **links unten**.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Der Graph geht **rechts oben**.

Merke

- $x \rightarrow +\infty$ bedeutet: Man betrachtet den Graphen ganz **rechts**.
- $x \rightarrow -\infty$ bedeutet: Man betrachtet den Graphen ganz **links**.
- Das Grenzwertverhalten gibt an, wie die **Höhe des Graphen** an den beiden Enden ist.

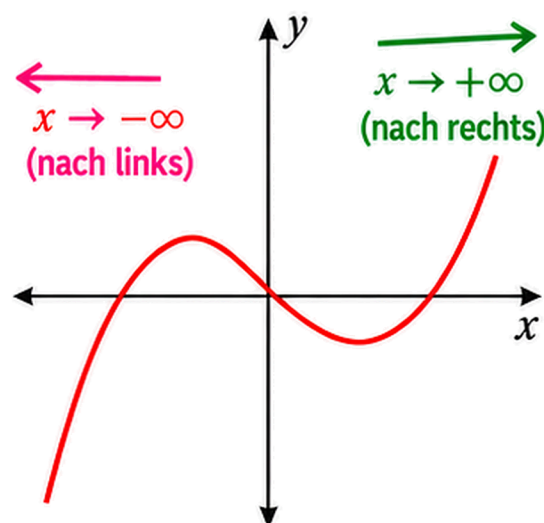
Grenzwertverhalten ganzrationaler Funktionen

Leserichtung und Denkweise

einfach mathe!

4. So liest du die Schreibweise richtig

- $x \rightarrow +\infty$ bedeutet:
Du gehst auf der x -Achse **nach rechts**.
- $x \rightarrow -\infty$ bedeutet:
Du gehst auf der x -Achse **nach links**.
- $f(x)$ beschreibt die **Höhe des Graphen** an dieser Stelle.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Der Graph geht **rechts oben**.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Der Graph geht **links unten**.

Merke

lim = Grenzwert

5. Nur höchste Potenz und Leitkoeffizient zählen

Für das Endverhalten sind nur die **höchste Potenz** und der **Leitkoeffizient** entscheidend.

a) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

Höchste Potenz	x^3
Grad	3 $\rightarrow$ ungerade
Leitkoeffizient	3 $\rightarrow$ positiv
Für $x \rightarrow +\infty$ gilt	$3x^3 \rightarrow +\infty$
Für $x \rightarrow -\infty$ gilt	$3x^3 \rightarrow -\infty$
Ergebnis	rechts oben, links unten.

Merke

Ungerader Exponent $\rightarrow$
zwei verschiedene Richtungen.

b) $g(x) = -4x^2 + 5x - 1$

Höchste Potenz	x^2
Grad	2 $\rightarrow$ gerade
Leitkoeffizient	-4 $\rightarrow$ negativ
Für $x \rightarrow +\infty$ gilt	$-4x^2 \rightarrow -\infty$
Für $x \rightarrow -\infty$ gilt	$-4x^2 \rightarrow -\infty$
Ergebnis	rechts unten, links unten.

Merke

Gerader Exponent $\rightarrow$
beide Seiten **gleich**.

6. Warum bestimmt das Vorzeichen des Leitkoeffizienten die Richtung?

Beispiel 1: $3x^3$

Für $|x|$ sehr groß gilt: $3x^3$ dominiert alle anderen Terme.
Wegen des ungeraden Exponenten hat x^3 unterschiedliche Vorzeichen:
 $x \rightarrow +\infty$: $x^3 > 0 \rightarrow 3x^3 > 0 \rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow -\infty$: $x^3 < 0 \rightarrow 3x^3 < 0 \rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

Beispiel 2: $-4x^2$

Für $|x|$ sehr groß gilt: $-4x^2$ dominiert alle anderen Terme.
Wegen des geraden Exponenten ist x^2 immer nichtnegativ ($x^2 \geq 0$):
 $x \rightarrow +\infty$: $-4x^2 < 0 \rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow -\infty$: $-4x^2 < 0 \rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

Merke

- Grad gerade = beide Enden zeigen in die **gleiche Richtung**.
- Grad ungerade = die Enden zeigen in **entgegengesetzte Richtungen**.
- Positiver Leitkoeffizient = **rechts oben**.
- Negativer Leitkoeffizient = **rechts unten**.

Grenzwertverhalten ganzrationaler Funktionen

Weitere Beispiele und Mini-Check

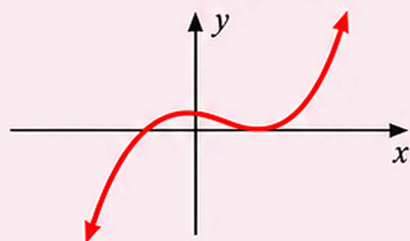
einfach mathe!

6. Weitere Beispiele

Für das Grenzwertverhalten sind nur die **höchste Potenz** und der **Leitkoeffizient** entscheidend.

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

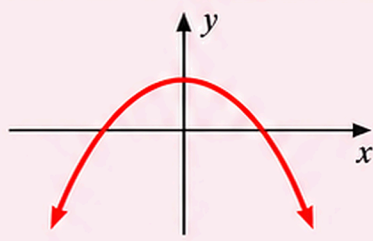
Höchste Potenz	x^3
Grad	3 $\rightarrow$ ungerade
Leitkoeffizient	3 $\rightarrow$ positiv
Ergebnis	rechts oben, links unten.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

b) $g(x) = -4x^2 + 5x - 1$

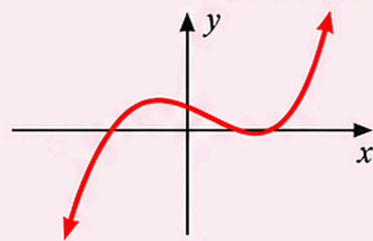
Höchste Potenz	x^2
Grad	2 $\rightarrow$ gerade
Leitkoeffizient	-4 $\rightarrow$ negativ
Ergebnis	rechts unten, links unten.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

c) $h(x) = x^5 - 4x^2 + 7$

Höchste Potenz	x^5
Grad	5 $\rightarrow$ ungerade
Leitkoeffizient	1 $\rightarrow$ positiv
Ergebnis	rechts oben, links unten.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

7. Typische Fehler vermeiden

1. Nicht auf mittlere Terme achten.

Terme mit kleinerem Grad und der konstante Term haben keinen Einfluss auf das Grenzwertverhalten.

2. Richtung richtig lesen.

$x \rightarrow +\infty$ bedeutet **nach rechts**.
 $x \rightarrow -\infty$ bedeutet **nach links**.

3. Ungerader Grad: verschiedene Richtungen.

Bei ungeradem Grad gehen die Funktionswerte für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ in **entgegengesetzte** Richtungen.

4. Gerader Grad: gleiche Richtung.

Bei geradem Grad gehen die Funktionswerte für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ in **dieselbe Richtung** (nach oben oder nach unten).

8. Mini-Check

- Bestimme das Grenzwertverhalten von $q(x) = 2x^4 - 3x + 1$.
- Bestimme das Grenzwertverhalten von $r(x) = -x^5 + 4x^2 - 7$.
- Warum ist bei $s(x) = 7x^2 - 100x + 2$ nur $7x^2$ für das Grenzwertverhalten entscheidend?

Kurzlösungen

- Gerader Grad, positiver Leitkoeffizient (2): $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = +\infty$ (beide Seiten oben).
- Ungerader Grad, negativer Leitkoeffizient (-1): $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = +\infty$ (rechts unten, links oben).
- Für $|x|$ sehr groß dominiert $7x^2$. Die übrigen Terme ($-100x$ und 2) werden im Vergleich unwichtig.

Merke

Nur die **höchste Potenz** und der **Leitkoeffizient** bestimmen das Grenzwertverhalten. Alle anderen Terme haben darauf keinen Einfluss.