LERNZETTEL · ANALYSIS

Steckbriefaufgaben

Funktionen aus Bedingungen bestimmen

einfach mathe!

Strategie, Übersetzungshilfen, minimaler Grad und ausführliche Beispiele.

1 Fester Ablauf
Übersichtlicher, systematischer Lösungsweg von den Bedingungen zur Funktion.

2 Ansätze nach Grad und Symmetrie
Passenden Funktionstyp wählen – je nach Grad und Symmetrieeigenschaften.

3 Eigenschaften in Gleichungen übersetzen
Gegebene Informationen (Punkte, Nullstellen, Extremstellen, Symmetrie usw.) in mathematische Gleichungen umwandeln.

4 Anzahl der Gleichungen bestimmen
Überprüfen, wie viele unabhängige Bedingungen vorliegen und ob sie zur Anzahl der unbekannten Parameter passen.

5 Minimalen Grad bestimmen
Den kleinsten möglichen Grad wählen, der alle gegebenen Eigenschaften erfüllt.

6 LGS lösen
Die erhaltenen Gleichungen mit einem passenden Verfahren lösen (Einsetzungs-, Gleichsetzungs-, Additions- oder Gaußverfahren).

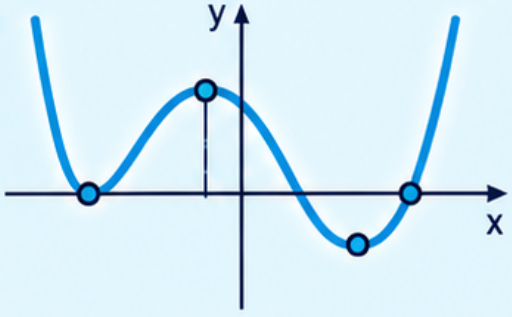
7 Ausführliche Beispiele
Vollständig gelöste Aufgaben mit Erklärungen und hilfreichen Hinweisen.

Steckbrief

- $P(1 \mid 2)$
- Nullstelle bei $x = -2$
- Extremstelle bei $x = 3$ (mit $f(3) = -1$)
- achsensymmetrisch zur y-Achse
- ...

Eigenschaften → passende Funktionsgleichung

$$f(x) = a\,x^4 + b\,x^2 + c$$



Merke

Bei **Steckbriefaufgaben** wird aus gegebenen Eigenschaften schrittweise eine passende Funktionsgleichung bestimmt.
Vom Text zur Gleichung – klar, systematisch und Schritt für Schritt.

LERNZETTEL · ANALYSIS

Inhalt · Steckbriefaufgaben

Vom festen Ablauf über Übersetzungshilfen bis zu vollständigen Beispielen.

einfach mathe!

LERNWEG

		Seite
G	**Grundlagen** – Fester Ablauf · Grundlagen	3
1	**Kapitel 1** – Ansatz, Symmetrie & Anzahl der Gleichungen	4 – 5
2	**Kapitel 2** – Eigenschaften in Gleichungen übersetzen	6 – 7
3	**Kapitel 3** – Minimalen Grad bestimmen	8
4	**Kapitel 4** – LGS lösen	9

BEISPIELE

		Seite
B1	**Beispiel 1** – Punkt · Nullstelle · Sattelpunkt	10 - 11
B2	**Beispiel 2** – Tiefpunkt · Tangente	12 - 13
B3	**Beispiel 3** – Symmetrie · Wendepunkt · Zusatzpunkt	14 - 15
B4	**Beispiel 4** – Wendepunkt · Steigung	16 - 17

ABSCHLUSS

		Seite
KONTROLLBLICK	Typische Fehler	18
ZUSAMMENFASSUNG	Alles auf einen Blick	19

LERNZETTEL · ANALYSIS

Fester Ablauf • Grundlagen

Aus den gegebenen Eigenschaften eine passende Funktionsgleichung aufstellen.

einfach mathe!

1 Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen
Je nach Grad und Symmetrie einen passenden Ansatz mit unbekannten Parametern wählen.

2 Symmetrie gegeben?
Wenn ja, allgemeine Funktionsgleichung entsprechend anpassen.

3 Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)
Aus Punkten, Nullstellen, Extrema, Wendepunkten usw. Gleichungen mit den unbekannten Parametern aufstellen.

4 LGS lösen
Die Gleichungen mit einem passenden Verfahren lösen (Einsetzungs-, Gleichsetzungs-, Additions- oder Gaußverfahren).

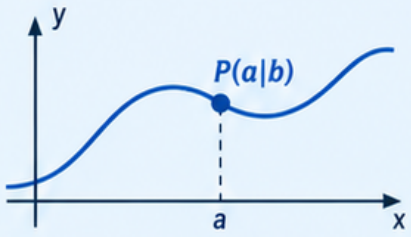
5 Berechnete Parameter einsetzen
Die gefundenen Werte für die Parameter in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen.

6 Wenn nötig, Bedingungen überprüfen
Die gefundene Funktionsgleichung in die ursprünglichen Bedingungen einsetzen und prüfen, ob alle erfüllt sind.

Welche Ableitung liefert welche Information?

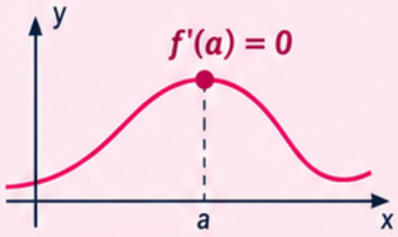
$f(x)$

- Punkt auf dem Graphen
- Funktionswert / Höhe
- z. B. $P(a|b) \rightarrow f(a) = b$



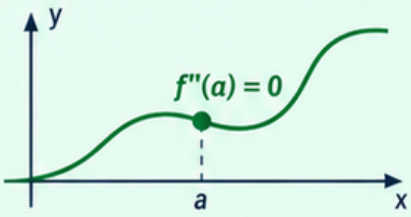
$f'(x)$

- Steigung / waagerechte Tangente
- Steigung $m \rightarrow f'(a) = m$
- Extremstelle $\rightarrow f'(a) = 0$



$f''(x)$

- Krümmung / Wendestelle
- Wendestelle $\rightarrow f''(a) = 0$
- Krümmungsverhalten $(f''(x) > 0$ oder $f''(x) < 0)$



Merke
Aus den gegebenen Eigenschaften (Punkte, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Symmetrie) erstellen wir Gleichungen mit den unbekannten Parametern. Diese lösen wir und setzen die Werte in die allgemeine Funktionsgleichung ein.

1 Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Je nach Grad und Symmetrie einen passenden Ansatz mit unbekannten Parametern wählen.

einfach mathe!

1 Grad der Funktion

Der Grad der **Funktion** gibt die höchste Potenz von x an und bestimmt damit die Anzahl der unbekannten Parameter.

Allgemeine Form (ohne Symmetrie)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Es gibt $n + 1$ unbekannte Parameter.

Grad 1:	$f(x) = ax + b$
Grad 2:	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Grad 3:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Grad 4:	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Grad 5:	$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

2 Symmetrie beachten

Je nach Symmetrie können bestimmte Potenzen im Ansatz weggelassen werden.

Achsensymmetrie zur y-Achse

Ungerade Exponenten werden gestrichen.
Nur gerade Potenzen bleiben.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0$$

Ursprungssymmetrie

Gerade Exponenten werden gestrichen. Die Konstante fällt weg.
Nur ungerade Potenzen bleiben.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x$$

3 Typische Ansätze nach Grad

Grad n	Allgemeine Form (ohne Symmetrie)	y-Achsensymmetrie (nur gerade Potenzen)	Ursprungssymmetrie (nur ungerade Potenzen)	Anzahl Parameter (ohne Symmetrie)
1	$f(x) = ax + b$	nicht möglich	$f(x) = ax$	2
2	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^2 + c$	nicht möglich	3
3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	nicht möglich	$f(x) = ax^3 + cx$	4
4	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$	nicht möglich	5
5	$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$	nicht möglich	$f(x) = ax^5 + cx^3 + ex$	6

Merke

- Der Ansatz richtet sich nach Grad und Symmetrie der Funktion.
- Durch Symmetrie reduziert sich die Anzahl der unbekannten Parameter.

1 Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Grad, Symmetrie und Anzahl der Gleichungen richtig nutzen.

einfach mathe!

4 Anzahl der Gleichungen

Die Anzahl der benötigten Gleichungen entspricht der Anzahl der unbekannten Parameter.

Für eine eindeutige Funktionsgleichung benötigen wir genau so viele unabhängige Bedingungen wie unbekannte Parameter.

Ohne Symmetrie

Grad 1:	2 Parameter → 2 unabhängige Gleichungen
Grad 2:	3 Parameter → 3 unabhängige Gleichungen
Grad 3:	4 Parameter → 4 unabhängige Gleichungen
Grad 4:	5 Parameter → 5 unabhängige Gleichungen
Grad 5:	6 Parameter → 6 unabhängige Gleichungen

Mit Symmetrie

y-Achsensymmetrie

Grad 2:	2 Parameter → 2 Gleichungen
Grad 4:	3 Parameter → 3 Gleichungen

Ursprungssymmetrie

Grad 1:	1 Parameter → 1 Gleichung
Grad 3:	2 Parameter → 2 Gleichungen
Grad 5:	3 Parameter → 3 Gleichungen

Schnellcheck

- Erst Symmetrie prüfen, dann Parameter zählen.
- Nur unabhängige Gleichungen zählen.
- Kontrollbedingungen aus Schritt 6 nicht mitzählen.
- Punkt, Nullstelle, Tangente und Extrempunkt vollständig übersetzen.

2 Eigenschaften in Gleichungen übersetzen

Punkte, Nullstellen, Steigungen und Tangenten vollständig übersetzen.

einfach mathe!

Punkte, Achsenschnittpunkte & Nullstellen

Text	Bedingung(en)
… geht durch den Punkt $P(a\|b)$	$f(a) = b$
… hat eine Nullstelle bei $x = a$	$f(a) = 0$
… schneidet die x-Achse bei $x = a$	$f(a) = 0$
… schneidet die y-Achse bei $y = b$	$f(0) = b$
… verläuft durch den Ursprung	$f(0) = 0$
… berührt die x-Achse bei $x = a$	$f(a) = 0$ und $f'(a) = 0$
… hat bei $x = a$ eine doppelte Nullstelle	$f(a) = 0$ und $f'(a) = 0$

Steigung, Tangente & Parallelität

Text	Bedingung(en)
… besitzt bei $x = a$ die Steigung m	$f'(a) = m$
… besitzt bei $x = a$ eine waagerechte Tangente	$f'(a) = 0$
… hat im Punkt $P(a\|b)$ eine waagerechte Tangente	$f(a) = b$ und $f'(a) = 0$
… hat bei $x = a$ die gleiche Steigung wie $y = mx + n$	$f'(a) = m$
… hat bei $x = a$ die Tangente $y = mx + n$	$f(a) = ma + n$ und $f'(a) = m$
… Tangente in $P(a\|b)$ ist parallel zu $y = mx + n$	$f(a) = b$ und $f'(a) = m$
… hat bei $x = a$ dieselbe Steigung wie bei $x = c$	$f'(a) = f'(c)$

Tangentengleichung

Ist $t(x) = mx + n$ bei $x = a$ gegeben, liefert sie zwei Informationen: Punktwert $f(a) = t(a) = ma + n$ und Steigung $f'(a) = m$. Bei einer waagerechten Tangente gilt $m = 0$.

2 Eigenschaften in Gleichungen übersetzen

Extrempunkte, Wendepunkte, Wendetangenten und Sattelpunkte.

einfach mathe!

Hochpunkte & Tiefpunkte

Text	Bedingung(en)
... hat eine Hoch-/Tiefstelle bei $x = a$	$f'(a) = 0$
... hat den Hoch-/Tiefpunkt $H/T(a \mid b)$	$f(a) = b$ und $f'(a) = 0$
... hat einen Hochpunkt bei $x = a$	$f'(a) = 0$; Kontrolle: $f''(a) < 0$
... hat einen Tiefpunkt bei $x = a$	$f'(a) = 0$; Kontrolle: $f''(a) > 0$

Wendepunkte, Wendetangente & Sattelpunkt

Text	Bedingung(en)
... hat eine Wendestelle bei $x = a$	$f''(a) = 0$
... hat den Wendepunkt $W(a \mid b)$	$f(a) = b$ und $f''(a) = 0$
... Wendepunkt $W(a \mid b)$ mit Steigung m	$f(a) = b,\ f'(a) = m,\ f''(a) = 0$
... hat bei $x = a$ die Wendetangente $y = mx + n$	$f(a) = ma + n,\ f'(a) = m,\ f''(a) = 0$
... hat bei $x = a$ eine waagerechte Wendetangente	$f'(a) = 0$ und $f''(a) = 0$
... hat den Sattelpunkt $S(a \mid b)$	$f(a) = b,\ f'(a) = 0,\ f''(a) = 0$

Prüfbedingungen

Für einen Hochpunkt und Tiefpunkt prüft man zusätzlich das Vorzeichen von $f''(a)$ ($f''(a) < 0$ für Hochpunkt, $f''(a) > 0$ für Tiefpunkt). Für einen echten Wendepunkt bzw. Sattelpunkt prüft man häufig zusätzlich, dass $f'''(a) \neq 0$. Diese Kontrollen gehören zu Schritt 6 und liefern nicht automatisch weitere LGS-Gleichungen.

3 Minimalen Grad bestimmen

Aus Textangaben und Graphen den kleinsten möglichen Grad erkennen.

einfach mathe!

1 Aus Textangaben bestimmen

ZÄHLREGEL

$$n_{min} = 1 + \text{Anzahl HP/TP} + 2 \cdot \text{Anzahl SP}$$

Jeder Hoch-/Tiefpunkt liefert eine Nullstelle von f'. Ein Sattelpunkt ist bei f' typischerweise eine doppelte Nullstelle und zählt deshalb doppelt.

BEISPIEL A

HP $H(1|2)$, TP $T(0|-5)$, SP $S(7|8)$

1 + 2 Extrempunkte + 2 für den Sattelpunkt = 5

Minimaler Grad: 5

BEISPIEL B

1 Tiefpunkt + 1 gewöhnlicher Wendepunkt.

Tiefpunkt → mindestens Grad 2.

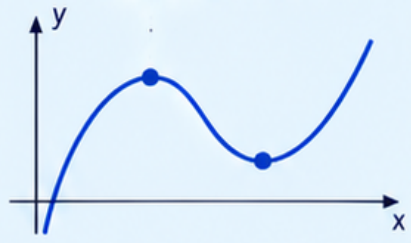
Wendepunkt → mindestens Grad 3.

Minimaler Grad: 3

2 Am Graphen bestimmen

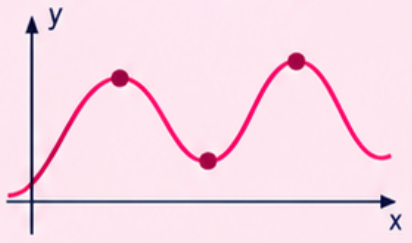
1. **Extrempunkte zählen** – E Extrempunkte → mindestens Grad $E + 1$
2. **Wendepunkte zählen** – W Wendepunkte → mindestens Grad $W + 2$
3. **Sattelpunkt beachten** – zählt in der f'-Zählung doppelt
4. **Endverhalten prüfen** – gleiche Richtung → gerader Grad; entgegengesetzt → ungerader Grad

2 Extrempunkte



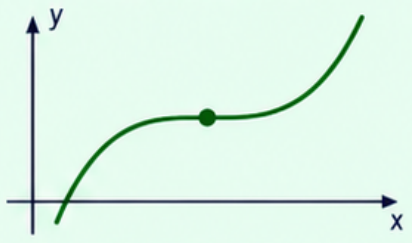
1 + 2 = 3 → Grad 3

3 Extrempunkte



1 + 3 = 4 → Grad 4

1 Sattelpunkt



1 + 2 = 3 → Grad 3

TIPP

Der minimale Grad ist die kleinste Zahl, die alle geforderten bzw. sichtbaren Eigenschaften gleichzeitig erlaubt.

4 LGS lösen

Ein passendes Verfahren wählen und die Gleichungen sauber auflösen.

einfach mathe!

1 Verfahren zum LGS lösen

Für lineare Gleichungssysteme gibt es drei gängige Verfahren. Je nach Gleichungen ist ein Verfahren besonders geeignet.

Einsetzungsverfahren

- Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und in die andere Gleichung einsetzen.
- Die entstehende Gleichung mit einer Variablen lösen und den zweiten Wert zurück-einsetzen.

Geeignet, wenn ...

- eine Gleichung leicht nach einer Variablen auflösbar ist.
- eine Variable bereits isoliert vorliegt.

Gleichsetzungsverfahren

- Beide Gleichungen nach derselben Variablen auflösen.
- Die beiden Terme gleichsetzen und die entstehende Gleichung lösen.

Geeignet, wenn ...

- beide Gleichungen leicht nach derselben Variablen auflösbar sind.
- keine Brüche oder sehr komplizierte Terme entstehen.

Additionsverfahren

- Eine Variable in beiden Gleichungen durch geschicktes Addieren oder Subtrahieren elimiieren.
- Die entstehende Gleichung mit einer Variable lösen und den zweiten Wert einsetzen.

Geeignet, wenn ...

- sich eine Variable durch Addition/Subtraktion leicht elimiieren lässt.
- die Koeffizienten gut geeignet sind (z. B. Gegenzahlen oder gleich große Beträge).

2 Beispiel: LGS mit dem Einsetzungsverfahren lösen

Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem Schritt für Schritt.

Gegebenes LGS

$$\text{I: } 3a + 2b = 8$$
$$\text{II: } a - b = 1$$

1 Eine Variable freistellen

Gleichung II nach a auflösen:

$$a = b + 1$$

2 In die andere Gleichung einsetzen

$a = b + 1$ in Gleichung I einsetzen:

$$3 \cdot (b + 1) + 2b = 8$$

3 Gleichung mit einer Variablen lösen

$$\begin{aligned} 3b + 3 + 2b &= 8 && \mid \text{ausmultiplizieren} \\ 5b + 3 &= 8 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 5b &= 5 && \mid -3 \\ b &= 1 && \mid :5 \end{aligned}$$

4 Zweiten Wert einsetzen

$b = 1$ in $a = b + 1$ einsetzen:

$$a = 1 + 1$$
$$a = 2$$

Lösung des LGS

$$a = 2, \quad b = 1$$

Merke

Immer prüfen, ob die Gleichungen unabhängig sind und wirklich neue Informationen liefern.

Vorgehensweise – Kurzcheckliste

1. Verfahren wählen (Einsetzen, Gleichsetzen oder Addieren).
2. Variable freistellen oder Gleichungen passend umformen.
3. Einsetzen oder addieren und die Gleichung mit einer Variablen lösen.
4. Den zweiten Wert in eine der Ausgangsgleichungen zurückeinsetzen.

1 Beispiel 1 – Punkt · Nullstelle · Sattelpunkt

Steckbriefaufgabe vollständig Schritt für Schritt lösen.

TEIL 1/2

einfach mathe!

AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades. Der Graph verläuft durch den Punkt $P(3|6)$, hat bei $x = 4$ eine Nullstelle und im Ursprung einen Sattelpunkt.

1 Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Für eine ganzrationale Funktion 4. Grades gilt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$
$$f'''(x) = 24ax + 6b$$

2 Symmetrie gegeben?

Keine gegebene Symmetrie → Ansatz bleibt unverändert.

3 Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Punkt $P(3|6)$:

$f(3) = 6 \rightarrow 81a + 27b + 9c + 3d + e = 6$

Nullstelle bei $x = 4$:

$f(4) = 0 \rightarrow 256a + 64b + 16c + 4d + e = 0$

Sattelpunkt im Ursprung $S(0|0)$:

$f(0) = 0 \rightarrow e = 0$
$f'(0) = 0 \rightarrow d = 0$
$f''(0) = 0 \rightarrow 2c = 0 \rightarrow c = 0$

Damit erhalten wir das LGS:

(I) $81a + 27b + 9c + 3d + e = 6$
(II) $256a + 64b + 16c + 4d + e = 0$
(III) $e = 0$
(IV) $d = 0$
(V) $c = 0$

4 LGS lösen

Die Werte aus (III)–(V) einsetzen: $c = 0,\ d = 0,\ e = 0.$

4.1 (I) und (II) vereinfachen:

Aus (I):

$81a + 27b + 9 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 = 6$
$81a + 27b = 6 \quad (I')$

Aus (II):

$256a + 64b + 16 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 = 0$
$256a + 64b = 0 \quad (II')$

4.2 b auflösen:

$256a + 64b = 0 \quad |:64$
$4a + b = 0 \quad |-4a$
$b = -4a$

4.3 in (I') einsetzen:

$81a + 27 \cdot (-4a) = 6$
$81a - 108a = 6$
$-27a = 6$
$a = \frac{6}{-27} = \frac{-2}{9}$

1 Beispiel 1 – Punkt • Nullstelle • Sattelpunkt

Steckbriefaufgabe vollständig Schritt für Schritt lösen.

TEIL 2/2

einfach mathe!

4 LGS lösen – Fortsetzung

4.4 b berechnen:

$$b = -4 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$b = \frac{8}{9}$$

4.5 Parameter zusammenfassen:

Ergebnis der Parameter:

$$a = -\frac{2}{9}$$
$$b = \frac{8}{9}$$
$$c = 0$$
$$d = 0$$
$$e = 0$$

Zwischenergebnis:

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{9}x^3$$

5 Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen:

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{9}x^3$$

6 Bedingungen überprüfen

Alle geforderten Eigenschaftien werden geprüft.

Sattelpunkt im Ursprung:

$$f(0) = -\frac{2}{9} \cdot 0^4 + \frac{8}{9} \cdot 0^3 = 0 \quad ✓$$
$$f'(0) = -\frac{8}{9} \cdot 0^3 + \frac{8}{3} \cdot 0^2 = 0 \quad ✓$$
$$f''(0) = -\frac{8}{3} \cdot 0^2 + \frac{16}{3} \cdot 0 = 0 \quad ✓$$

Punkt $P(3|6)$:

$$f(3) = -\frac{2}{9} \cdot 3^4 + \frac{8}{9} \cdot 3^3$$
$$= -\frac{2}{9} \cdot 81 + \frac{8}{9} \cdot 27$$
$$= -18 + 24 = 6 \quad ✓$$

Nullstelle bei $x = 4$:

$$f(4) = -\frac{2}{9} \cdot 4^4 + \frac{8}{9} \cdot 4^3$$
$$= -\frac{2}{9} \cdot 256 + \frac{8}{9} \cdot 64$$
$$= -\frac{512}{9} + \frac{512}{9} = 0 \quad ✓$$

Echter Sattelpunkt:

$$f'''(x) = -\frac{16}{3}x + \frac{16}{3}$$
$$f'''(0) = -\frac{16}{3} \cdot 0 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \neq 0 \quad ✓$$

Damit liegt ein echter Sattelpunkt vor.

✓ Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^4 + \frac{8}{9}x^3$$

2 Beispiel 2 – Tiefpunkt und Tangente

Steckbriefaufgabe vollständig Schritt für Schritt lösen. TEIL 1/2

einfach mathe!

AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Der Graph hat bei $T(1\,|\,-2)$ einen Tiefpunkt und bei $x = 0$ die Tangente $t(x) = 2x + 1$.

1 Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Für eine ganzrationale Funktion 3. Grades gilt:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

2 Symmetrie gegeben?

Keine gegebene Symmetrie → Ansatz bleibt unverändert.

3 Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Tiefpunkt $T(1\,|\,-2)$:

$f(1) = -2 \;\rightarrow\; a + b + c + d = -2$ **(I)**

$f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 3a + 2b + c = 0$ **(II)**

Tangente bei $x = 0$:

$f(0) = 1 \;\rightarrow\; d = 1$ **(III)**

$f'(0) = 2 \;\rightarrow\; c = 2$ **(IV)**

4 LGS lösen

Die Gleichungen (III) und (IV) direkt einsetzen: $c = 2$ und $d = 1$.

4.1 (I) und (II) mit $c = 2, d = 1$:

$$a + b + 2 + 1 = -2$$
$$a + b = -5$$

$$3a + 2b + 2 = 0$$
$$3a + 2b = -2$$

4.2 b auflösen:

$$a + b = -5 \quad |-a$$
$$b = -5 - a$$

4.3 In (II) einsetzen:

$$3a + 2b = -2$$
$$3a + 2 \cdot (-5 - a) = -2$$
$$3a - 10 - 2a = -2$$
$$a - 10 = -2 \quad |+10$$
$$a = 8$$

2 Beispiel 2 – Tiefpunkt und Tangente

Steckbriefaufgabe vollständig Schritt für Schritt lösen. TEIL 2/2

einfach mathe!

4 LGS lösen – Fortsetzung

4.4 b berechnen:

$$b = -5 - a$$
$$b = -5 - 8$$
$$b = -13$$

4.5 Parameter zusammenfassen:

$$a = 8$$
$$b = -13$$
$$c = 2$$
$$d = 1$$

4.6 Zwischenergebnis:

$$f(x) = 8x^3 - 13x^2 + 2x + 1$$

Alle unbekannten Parameter sind bestimmt.

5 Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen.

$$f(x) = 8x^3 - 13x^2 + 2x + 1$$

6 Bedingungen überprüfen

Alle geforderten Eigenschaften werden geprüft.

- **Punkt** $W(1 \mid -3)$:
  $f(1) = 8 - 13 + 2 + 1$
  $f(1) = -2$ ✓
  Sollwert: -3? $-2 \neq -3$

- **Tiefpunkt** $(f'(1) = 0)$:
  $f'(x) = 24x^2 - 26x + 2$
  $f'(1) = 24 - 26 + 2 = 0$ ✓
  Damit liegt bei $x = 1$ ein Tiefpunkt vor.

- **Tangente bei** $x = 0$:
  $f(0) = 1$ ✓
  $f'(0) = 2$ ✓
  Damit hat die Tangente die Steigung 2 und verläuft durch den Punkt $(0 \mid 1)$.

- **Wirklich Tiefpunkt?**
  $f''(x) = 48x - 26$
  $f''(1) = 48 - 26 = 22 > 0$ ✓
  Damit liegt tatsächlich ein Tiefpunkt vor.

Ergebnis:

$$f(x) = 8x^3 - 13x^2 + 2x + 1$$

3 Beispiel 3 – Symmetrie • Wendepunkt • Zusatzpunkt

Steckbriefaufgabe vollständig Schritt für Schritt lösen.

TEIL 1/2

einfach mathe!

AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine punktsymmetrische ganzrationale Funktion 5. Grades. Der Graph hat den Wendepunkt $W(1|2)$ mit Steigung 3 und verläuft zusätzlich durch $P(2|\frac{1}{4})$.

1 Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Für eine ganzrationale Funktion 5. Grades gilt zunächst:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

6 unbekannte Parameter

$$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

2 Symmetrie gegeben? Wenn ja, allgemeine Funktionsgleichung anpassen

Punktsymmetrie zum Ursprung → nur ungerade Potenzen bleiben erhalten.

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

→ **3 Parameter**

3 Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Wendepunkt $W(1|2)$ mit Steigung 3:

$f(1) = 2$	→	$a + b + c = 2$	**(I)**
$f'(1) = 3$	→	$5a + 3b + c = 3$	**(II)**
$f''(1) = 0$	→	$20a + 6b = 0$	**(III)**

Zusatzpunkt $P(2|\frac{1}{4})$:

$$f(2) = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad 32a + 8b + 2c = \frac{1}{4} \qquad \textbf{(IV)}$$

4 LGS lösen

4.1 (II) – (I):

$$(5a+3b+c) - (a+b+c) = 3 - 2$$
$$4a + 2b = 1 \quad | : 2$$
$$2a + b = \frac{1}{2}$$

4.2 Aus (III):

$$20a + 6b = 0 \quad | : 2$$
$$10a + 3b = 0 \quad | -10a$$
$$3b = -10a \quad | : 3$$
$$b = -\frac{10a}{3}$$

4.3 In $2a + b = \frac{1}{2}$ einsetzen:

$$2a + \left(-\frac{10a}{3}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{6a}{3} - \frac{10a}{3} = \frac{1}{2}$$
$$-\frac{4a}{3} = \frac{1}{2} \quad | \cdot 3$$
$$-4a = \frac{3}{2} \quad | : (-4)$$
$$a = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}$$

3 Beispiel 3 – Symmetrie • Wendepunkt • Zusatzpunkt

Steckbriefaufgabe vollständig Schritt für Schritt lösen. TEIL 2/2

einfach mathe!

4 LGS lösen – Fortsetzung

4.4 b berechnen:

$$b = -\frac{10a}{3}$$

$$b = -\frac{10 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)}{3}$$

$$b = \frac{30}{24}$$

$$b = \frac{5}{4}$$

4.5 c berechnen:

$$a + b + c = 2 \quad | -a - b$$

$$c = 2 - a - b$$

$$c = 2 - \left(-\frac{3}{8}\right) - \frac{5}{4}$$

$$c = \frac{16}{8} + \frac{3}{8} - \frac{10}{8}$$

$$c = \frac{9}{8}$$

4.6 Zusatzpunkt prüfen:

$$32a + 8b + 2c = \frac{1}{4}$$

$$32 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + 8 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{4}$$

$$-12 + 10 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

$$-2 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \quad ✓$$

5 Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte für a, b und c in die Funktionsgleichung einsetzen.

$$f(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{9}{8}x$$

6 Bedingungen überprüfen

Alle geforderten Eigenschaften werden geprüft.

W(1|2):

$$f(1) = -\frac{3}{8} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} = 2 \quad ✓$$

Steigung:

$$f'(x) = -\frac{15}{8}x^4 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{9}{8}$$

$$f'(1) = -\frac{15}{8} + \frac{15}{4} + \frac{9}{8} = 3 \quad ✓$$

Wendestelle:

$$f''(x) = -\frac{45}{2}x^2 + \frac{15}{2}$$

$$f''(1) = 0 \quad ✓$$

$$f'''(x) = -45x$$

$$f'''(1) = -15 \neq 0 \quad ✓$$

Zusatzpunkt $P\left(2 \middle| \frac{1}{4}\right)$:

$$f(2) = -\frac{3}{8} \cdot 32 + \frac{5}{4} \cdot 8 + \frac{9}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4} \quad ✓$$

$$-12 + 10 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \quad ✓$$

Symmetrie:

Nur ungerade Potenzen → punktsymmetrisch zum Ursprung ✓

✓ Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{9}{8}x$$

4 Beispiel 4 – Wendepunkt und Steigung

Steckbriefaufgabe vollständig Schritt für Schritt lösen. TEIL 1/2

einfach mathe!

AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades.
Der Graph hat einen Wendepunkt im Punkt $W(1|-3)$ und an dieser Stelle die Steigung 4.
Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = 1$.

1 Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Wir benötigen eine ganzrationale Funktion 3. Grades.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''''(x) = 6ax + 2b$$

2 Symmetrie gegeben?

Keine gegebene Symmetrie → Ansatz bleibt unverändert.

3 Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

$W(1|-3)$ ist ein Wendepunkt:

- $f(1) = -3$ (Punkt liegt auf dem Graphen)
- $f''''(1) = 0$ (Wendepunkt)

An dieser Stelle beträgt die Steigung 4:

- $f'(1) = 4$

Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = 1$:

- $f(0) = 1$

Damit erhalten wir das LGS:

$$a + b + c + d = -3 \quad \text{(I)}$$
$$3a + 2b + c = 4 \quad \text{(II)}$$
$$6a + 2b = 0 \quad \text{(III)}$$
$$d = 1 \quad \text{(IV)}$$

4 LGS lösen

4.1 Aus (IV):

$$d = 1$$

In (I) einsetzen:

$$a + b + c + 1 = -3$$
$$a + b + c = -4 \quad \text{(I')}$$

4.2 b auflösen:

$$6a + 2b = 0 \quad | : 2$$
$$3a + b = 0 \quad | -3a$$
$$b = -3a$$

4.3 In (II) einsetzen:

$$3a + 2b + c = 4$$
$$3a + 2 \cdot (-3a) + c = 4$$
$$3a - 6a + c = 4$$
$$-3a + c = 4 \quad | +3a$$
$$c = 4 + 3a$$

4 Beispiel 4 – Wendepunkt und Steigung

Steckbriefaufgabe vollständig Schritt für Schritt lösen.

TEIL 2/2

einfach mathe!

4 LGS lösen – Fortsetzung

4.4 a berechnen:

In $a+b+c=-4$ einsetzen:

$$a+(-3a)+(4+3a)=-4$$

$$a+4=-4 \quad |-4$$

$$a=-8$$

4.5 b und c berechnen:

$$b=-3a$$
$$b=-3\cdot(-8)$$
$$b=24$$

$$c=4+3a$$
$$c=4+3\cdot(-8)$$
$$c=4-24$$
$$c=-20$$

$d=1$ (aus IV)

4.6 Ergebnis der Parameter:

$$a=-8$$
$$b=24$$
$$c=-20$$
$$d=1$$

Zwischenergebnis:

$$f(x)=-8x^3+24x^2-20x+1$$

5 Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen.

$$f(x)=-8x^3+24x^2-20x+1$$

6 Bedingungen überprüfen

Alle geforderten Eigenschaften werden geprüft.

6.1 Punkt $W(1|-3)$:

$$f(1)=-8+24-20+1$$
$$=-3 \quad \checkmark$$

6.2 Steigung 4 an dieser Stelle:

$$f'(x)=-24x^2+48x-20$$
$$f'(1)=-24+48-20=4 \quad \checkmark$$

6.3 Wendepunkt an dieser Stelle:

$$f''(x)=-48x+48$$
$$f''(1)=-48+48=0 \quad \checkmark$$

6.4 Echter Wendepunkt:

$$f'''(x)=-48$$
$$f'''(1)=-48\neq 0 \quad \checkmark$$

→ Wendepunkt ist tatsächlich vorhanden.

6.5 y-Achsenabschnitt:

$$f(0)=1 \quad \checkmark$$

Ergebnis:

$$f(x)=-8x^3+24x^2-20x+1$$

Kontrollblick – typische Fehler

Worauf du bei Steckbriefaufgaben besonders achten solltest.

einfach mathe!

1 Zu wenig Bedingungen

Sind weniger unabhängige Gleichungen als unbekannte Parameter vorhanden, hat das LGS unendlich viele Lösungen.

Beispiel:
Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
hat 4 Paramenter, aber nur 3 unabhängige Bedingungen → unendlich viele Lösungen.

2 Gleiche Information doppelt gezählt

Ein gegebener Punkt liefert genau die zugehörigen Bedingungen – nicht mehr.

Beispiel: Extrempunkt $T(2 \mid 3)$
liefert genau zwei Bedingungen:

$$f(2) = 3 \quad \text{und} \quad f'(2) = 0$$

Nicht zusätzlich weitere Gleichungen aufstellen!

3 Tangente unvollständig übersetzt

Eine Tangente $t(x) = mx + n$ bei $x = a$ liefert immer zwei Bedingungen: gleicher Funktionswert und gleiche Steigung.

Beispiel:
Die Tangente $t(x) = 2x - 1$ bei $x = 3$ liefert:

$$f(3) = t(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \quad \text{und} \quad f'(3) = 2$$

4 Symmetrie vergessen

Wenn Symmetrie gegeben ist, muss der Ansatz zuerst entsprechend reduziert werden. Sonst enthält er zu viele Parameter und das LGS wird unnötig kompliziert.

Beispiel: Achsensymmetrie zur y-Achse
Nur gerade Potenzen verwenden:

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (statt allgemeiner Ansatz)

5 Minimalen Grad zu klein gewählt

Der minimale Grad muss so gewählt werden, dass alle gegebenen Eigenschaften erfüllt werden können. Ist der Grad zu klein, lässt sich das LGS nicht lösen.

Beispiel:
Für zwei Extrempunkte und einen Sattelpunkt ist mindestens Grad 5 erforderlich.
Ein Ansatz 3. oder 4. Grades reicht nicht aus.

6 Hinreichende Bedingung nicht geprüft

Nach dem Lösen des LGS müssen die geforderten Eigenschaften überprüft werden (Hoch-/Tiefpunkt oder Wendepunkt).

Beispiel:

- Hoch-/Tiefpunkt: $f'(a) = 0$ und $f''(a) \neq 0$
  - $f''(a) < 0 \rightarrow$ Hochpunkt
  - $f''(a) > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt
- Wendepunkt: $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$

7 Rechenfehler im LGS

Beim Lösen des Gleichungssystems passieren leicht Recherefehler. Deshalb systematisch, übersichtlich und in kleinen Schritten rechnen.

Beispiel: Gleichung: $3a - 2b = 6$

Schrittweise lösen:

$$\begin{aligned} 3a - 2b &= 6 \quad | +2b \\ 3a &= 6 + 2b \quad | : 3 \\ a &= 2 + \frac{2}{3}b \end{aligned}$$

Checkliste

Vor dem Abgeben kurz prüfen

- Stimmt der Ansatz?
- Sind alle Bedingungen übersetzt?
- Sind die Gleichungen unabhängig?
- Sind die Parameter richtig eingesetzt?
- Wurden die Bedingungen kontrolliert?

Zusammenfassung – Alles auf einen Blick

einfach mathe!

Die wichtigsten Schritte und Übersetzungshilfen auf einen Blick.

A Die 6 Schritte

Der systematische Ablauf zur Lösung von Steckbriefaufgaben.

1	**Ansatz wählen**	Je nach Grad und Symmetrie einen passenden Funktionstyp mit unbekannten Parametern wählen.
2	**Bedingungen übersetzen**	Die gegebenen Informationen in mathematische Gleichungen umwandeln (Punkte, Nullstellen, Extremstellen, Symmetrie usw.).
3	**Gleichungen aufstellen**	Aus allen Bedingungen ein lineares Gleichungssystem (LGS) für die unbekannten Parameter erstellen.
4	**LGS lösen**	Die Gleichungen mit einem passenden Verfahren lösen (Einsetzungs-, Gleichsetzungs-, Additions- oder Gaußverfahren).
5	**Parameter einsetzen**	Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen.
6	**Ergebnis überprüfen**	Prüfen, ob alle Bedingungen erfüllt sind und die Funktionsgleichung die geforderten Eigenschaften besitzt.

B Wichtige Übersetzungshilfen

Die häufigsten Angaben im Aufgabentext und ihre mathematische Formulierung.

Angabe im Text	Mathematische Bedingung(en)
Punkt $P(a \mid b)$	$f(a) = b$
Nullstelle bei $x = a$	$f(a) = 0$
Extrempunkt $E(a \mid b)$	$f(a) = b$ und $f'(a) = 0$
Wendepunkt $W(a \mid b)$	$f(a) = b$ und $f''(a) = 0$
Tangente $t(x) = mx + n$ bei $x = a$	$f(a) = ma + n$ und $f'(a) = m$
Sattelpunkt $S(a \mid b)$	$f(a) = b$, $f'(a) = 0$ und $f''(a) = 0$

C Strategie

Mit diesen Tipps löst du Steckbriefaufgaben sicher und effizient.

Ansatz clever wählen

- Grad und Symmetrie nutzen.
- So wenige Parameter wie möglich wählen.
- Nur einen Ansatz verwenden, der alle Bedingungen erfüllen kann.

Bedingungen sauber übersetzen

- Jede Textangabe genau lesen und richtig deuten.
- Auf Vorzeichen, Mehrfach-Nullstellen und Symmetrie achten.
- Unbekannte Parameter konsequent in Gleichungen einsetzen.

Ergebnis kontrollieren

- Alle gegebenen Bedingungen einsetzen und überprüfen.
- Punkte, Nullstellen, Tangenten, Extrem- und Wendepunkte prüfen.
- Graphisch vorstellen: Passt der Verlauf zu den Angaben?
- Auf mögliche Sonderfälle achten.

Merke

Steckbriefaufgaben wirken zuerst komplex – mit einem **festen Ablauf** lassen sie sich aber **systematisch und sicher lösen.**
Wichtig sind ein passender Ansatz, die richtige Übersetzung der Bedingungen und eine sorgfältige Kontrolle des Ergebnisses.