

Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen

Graphische Bedeutung und rechnerische Überprüfung

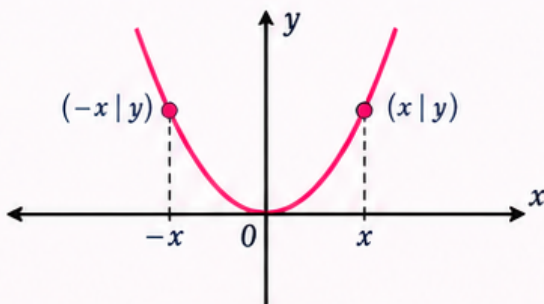
einfach mathe!

1 Was bedeutet das graphisch?

Achsensymmetrie zur y-Achse

Der Graph ist an der y-Achse gespiegelt, d. h. links und rechts von der y-Achse verläuft er spiegelgleich.

Wenn $(x | y)$ auf dem Graphen liegt, dann liegt auch $(-x | y)$ auf dem Graphen.

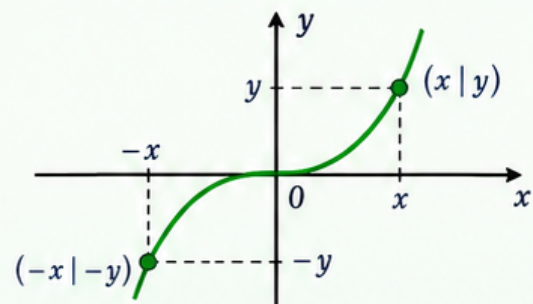


links und rechts spiegelgleich

Punktsymmetrie zum Ursprung

Der Graph geht durch eine 180°-Drehung um den Ursprung in sich selbst über (Punktspiegelung am Ursprung).

Wenn $(x | y)$ auf dem Graphen liegt, dann liegt auch $(-x | -y)$ auf dem Graphen.



Punktspiegelung am Ursprung



Merke: Achsensymmetrie = Spiegelung an der y-Achse.
Punktsymmetrie = 180°-Drehung um den Ursprung.

2 So zeigst du es rechnerisch

Kriterium für achsensymmetrisch zur y-Achse

$$f(-x) = f(x)$$

Dann ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.

Kriterium für punktsymmetrisch zum Ursprung

$$f(-x) = -f(x)$$

Dann ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

Vorgehensweise (in 3 Schritten):

- 1 Setze $-x$ für x in die Funktion $f(x)$ ein.
- 2 Vereinfache den Ausdruck.
- 3 Vergleiche das Ergebnis mit $f(x)$ (für Achsensymmetrie) oder mit $-f(x)$ (für Punktsymmetrie).

3 Merksatz für ganzrationale Funktionen

Achsensymmetrisch zur y-Achse

- nur gerade Exponenten
- Konstante erlaubt

Beispiel: $f(x) = x^4 + 6x^2 - 5$

Punktsymmetrisch zum Ursprung

- nur ungerade Exponenten
- keine Konstante

Beispiel: $f(x) = 2x^3 + x$

Merke: Gemischte gerade und ungerade Exponenten → meist keine der beiden Symmetrien.

Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen

Beispiele und rechnerische Überprüfung

einfach mathe!

4 Beispiele für Achsensymmetrie

a) $f(x) = x^2 + 1$

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^2 + 1 \\&= x^2 + 1 \\&= f(x)\end{aligned}$$

achsensymmetrisch zur y-Achse

b) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 5$

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^4 + 6(-x)^2 - 5 \\&= x^4 + 6x^2 - 5 \\&= f(x)\end{aligned}$$

achsensymmetrisch zur y-Achse



Merke: Nur gerade Exponenten und eine Konstante stören nicht.

5 Beispiele für Punktsymmetrie

a) $f(x) = x^3 - x$

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^3 - (-x) \\&= -x^3 + x \\&= -(x^3 - x) \\&= -f(x)\end{aligned}$$

punktsymmetrisch zum Ursprung

b) $f(x) = 2x^3 + x$

$$\begin{aligned}f(-x) &= 2(-x)^3 + (-x) \\&= -2x^3 - x \\&= -(2x^3 + x) \\&= -f(x)\end{aligned}$$

punktsymmetrisch zum Ursprung



Merke: Nur ungerade Exponenten und keine Konstante.

6 Beispiel: weder noch

$$f(x) = x^2 + 6x - 1$$

1 Berechne $f(-x)$: $f(-x) = (-x)^2 + 6(-x) - 1 = x^2 - 6x - 1$

2 Vergleiche mit $f(x)$ und $-f(x)$: $f(x) = x^2 + 6x - 1$ $-f(x) = -x^2 - 6x + 1$

3 **Ergebnis:** $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$

weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch



Merke: Gemischte gerade und ungerade Exponenten → meist keine der beiden Symmetrien.

Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen

Typische Fehler und Mini-Check

einfach mathe!

7 Typische Fehler vermeiden

Gerade und ungerade Exponenten gemischt

Dann liegt meist keine Symmetrie vor, weil sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthalten sind.

Kriterien verwechseln

$f(-x) = f(x)$ gehört zur Achsensymmetrie zur y-Achse.

$f(-x) = -f(x)$ gehört zur Punktsymmetrie zum Ursprung.

Konstante bei Punktsymmetrie übersehen

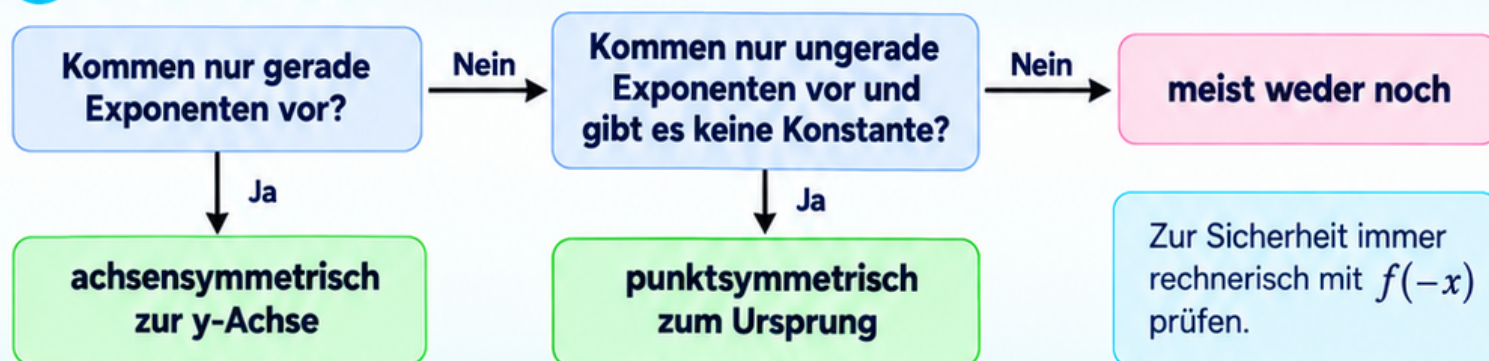
Ein konstanter Term zerstört die Punktsymmetrie zum Ursprung, denn er bleibt bei $f(-x)$ unverändert.

Graphische Bedeutung verwechseln

Achsensymmetrie ist die Spiegelung an der y-Achse.

Punktsymmetrie ist die 180°-Drehung um den Ursprung.

8 Schnellcheck



9 Mini-Check

Aufgaben

1. Untersuche $f(x) = x^6 - 4x^2 + 3$.
2. Untersuche $g(x) = -3x^5 + x$.
3. Untersuche $h(x) = x^4 + 2x^3$.
4. Erkläre graphisch den Unterschied zwischen beiden Symmetrien.

Kurzlösungen

1. achsensymmetrisch zur y-Achse
2. punktsymmetrisch zum Ursprung
3. weder noch
4. Achsensymmetrie: Spiegelung an der y-Achse; Punktsymmetrie: 180°-Drehung um den Ursprung.

Merke: Erst graphisch verstehen, dann rechnerisch mit $f(-x)$ absichern.

Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen

Vertiefung, Vorzeichenhilfe und Zusatzübungen

einfach mathe!

10 Punktsymmetrie Schritt für Schritt prüfen

Beispiel: $f(x) = 2x^3 - 6x$

Wichtig: Bei Punktsymmetrie immer zuerst $f(-x)$ bilden, dann $-f(x)$, danach vergleichen.

1 $f(-x)$ bilden

$$\begin{aligned}f(-x) &= 2(-x)^3 - 6(-x) \\&= 2 \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) + 6x \\&= -2x^3 + 6x\end{aligned}$$

2 $-f(x)$ bilden

$$\begin{aligned}-f(x) &= -(2x^3 - 6x) \\&= -2x^3 + 6x\end{aligned}$$

3 Vergleichen

$$f(-x) = -f(x)$$



**punktsymmetrisch
zum Ursprung.**

11 Vorzeichenhilfe bei $(-x)^n$

Vorzeichenregel

positiver Vorfaktor + gerade Potenz von $(-x)$ → **positiv**

positiver Vorfaktor + ungerade Potenz von $(-x)$ → **negativ**

negativer Vorfaktor + gerade Potenz von $(-x)$ → **negativ**

negativer Vorfaktor + ungerade Potenz von $(-x)$ → **positiv**

Beispiele

$$(-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2$$

$$(-x)^3 = (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = -x^3$$

$$2(-x)^3 = -2x^3$$

$$-2(-x)^4 = -2x^4$$



Merke: Entscheidend ist die Anzahl der Minuszeichen bzw. ob die Potenz gerade oder ungerade ist.

12 Zusatzübungen

Aufgaben

- 1 Untersuche $f(x) = x^5 - 3x$ auf Punktsymmetrie.
- 2 Untersuche $g(x) = x^4 + 2x^2 - 7$ auf Achsensymmetrie.
- 3 Untersuche $h(x) = x^3 + x^2$ auf Symmetrie.

Kurzlösungen

- 1 punktsymmetrisch zum Ursprung
- 2 achsensymmetrisch zur y-Achse
- 3 weder noch



Merke: Nur gerade Exponenten → meist achsensymmetrisch.
Nur ungerade Exponenten und keine Konstante → meist punktsymmetrisch.
Gemischte Exponenten → meist weder noch.