

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 1



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine quadratische Funktion 2. Grades. Der Graph hat den Scheitelpunkt $S(2|-3)$ und verläuft durch den Punkt $P(0|5)$.

1

Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Für eine ganzrationale Funktion 2. Grades verwenden wir den klassischen allgemeinen Ansatz:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

2

Symmetrie gegeben?

Keine Symmetrie angegeben. Der allgemeine Ansatz bleibt unverändert.

3

Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Ein Scheitelpunkt liefert eine Punktbedingung und eine Ableitungsbedingung.
Der zusätzliche Punkt liefert eine weitere Gleichung.

Scheitelpunkt $S(2|-3)$:

$$f(2) = -3$$

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -3$$

$$4a + 2b + c = -3 \quad (I)$$

Am Scheitelpunkt gilt außerdem:

$$f'(2) = 0$$

$$2a \cdot 2 + b = 0$$

$$4a + b = 0 \quad (II)$$

Punkt $P(0|5)$:

$$f(0) = 5$$

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5$$

$$c = 5 \quad (III)$$

4

LGS lösen

Zuerst nutzen wir die einfache Gleichung (III).

4.1 Aus (III):

$$c = 5$$

Diesen Wert setzen wir in (I) ein.

4.2 (I): $4a + 2b + c = -3$

$$4a + 2b + 5 = -3 \quad | -5$$

$$4a + 2b = -8 \quad | :2$$

$$2a + b = -4$$

$$(I')$$

4.3

Jetzt lösen wir (I') und (II) gemeinsam:

$$(I') \quad 2a + b = -4$$

$$(II) \quad 4a + b = 0$$

$$(II) - (I'):$$

$$(4a + b) - (2a + b) = 0 - (-4)$$

$$2a = 4 \quad | :2$$

$$a = 2$$

➡ Fortsetzung auf Seite 2

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 1



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine quadratische Funktion 2. Grades. Der Graph hat den Scheitelpunkt $S(2|-3)$ und verläuft durch den Punkt $P(0|5)$.

4 | LGS lösen – Fortsetzung

4.4 b berechnen:

In (II) einsetzen:

$$\begin{aligned} 4a + b &= 0 \\ 4 \cdot 2 + b &= 0 \\ 8 + b &= 0 \quad | -8 \\ b &= -8 \end{aligned}$$

4.5 Parameter zusammenfassen:

Ergebnis der Parameter:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -8 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Damit sind alle Parameter bestimmt.

4.6 Zwischenergebnis:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$$

5 | Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f(x) &= 2x^2 + (-8)x + 5 \\ f(x) &= 2x^2 - 8x + 5 \end{aligned}$$

6 | Wenn nötig, Bedingungen überprüfen

Punktprobe $P(0|5)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 5 \\ f(0) &= 5 \end{aligned}$$



Scheitelpunktsprobe:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 5 \\ f(2) &= 2 \cdot 4 - 16 + 5 \\ f(2) &= 8 - 16 + 5 = -3 \end{aligned}$$



Ableitungsprobe:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x - 8 \\ f'(2) &= 4 \cdot 2 - 8 \\ f'(2) &= 8 - 8 = 0 \end{aligned}$$



Art des Scheitelpunkts:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4 \\ f''(2) &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Also liegt bei $S(2|-3)$ ein Tiefpunkt vor.



Damit sind alle Bedingungen erfüllt.



Ergebnis:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$$

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 2



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades.

Der Graph hat den Hochpunkt $H(-1|4)$ und den Tiefpunkt $T(2|-5)$.

1

Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Für eine ganzrationale Funktion 3. Grades verwenden wir den allgemeinen Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

2

Symmetrie gegeben?

Keine Symmetrie angegeben. Der allgemeine Ansatz bleibt unverändert.

3

Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Jeder Extrempunkt liefert eine Punktbedingung und eine Bedingung mit der 1. Ableitung.

Hochpunkt $H(-1|4)$:

$$f(-1) = 4$$

$$a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 4$$

$$-a + b - c + d = 4 \quad (I)$$

$$f'(-1) = 0$$

$$3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$$

$$3a - 2b + c = 0 \quad (II)$$

Tiefpunkt $T(2|-5)$:

$$f(2) = -5$$

$$a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -5$$

$$8a + 4b + 2c + d = -5 \quad (III)$$

$$f'(2) = 0$$

$$3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0$$

$$12a + 4b + c = 0 \quad (IV)$$

4

LGS lösen

Wir formen das Gleichungssystem Schritt für Schritt um.

4.1 c aus (II) ausdrücken:

$$3a - 2b + c = 0 \quad | -3a \quad | +2b$$

$$c = -3a + 2b$$

4.2 c in (IV) einsetzen:

$$12a + 4b + (-3a + 2b) = 0$$

$$9a + 6b = 0 \quad | :3$$

$$3a + 2b = 0 \quad | -3a$$

$$2b = -3a \quad | :2$$

$$b = -\frac{3}{2}a$$

4.3 Dann c bestimmen:

$$c = -3a + 2b$$

$$c = -3a + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}a\right)$$

$$c = -3a - 3a$$

$$c = -6a$$

➔ Fortsetzung auf Seite 2

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 2



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Der Graph hat den Hochpunkt $H(-1|4)$ und den Tiefpunkt $T(2|-5)$.

4

LGS lösen

Fortsetzung

4.4 d aus (I) bestimmen:

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= 4 \\ -a + \left(-\frac{3}{2}a\right) - (-6a) + d &= 4 \\ \frac{7}{2}a + d &= 4 \quad | -\frac{7}{2}a \\ d &= 4 - \frac{7}{2}a \quad (V) \end{aligned}$$

4.5 d aus (III) bestimmen:

$$\begin{aligned} 8a + 4b + 2c + d &= -5 \\ 8a + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}a\right) + 2 \cdot (-6a) + d &= -5 \\ -10a + d &= -5 \quad | +10a \\ d &= -5 + 10a \quad (VI) \end{aligned}$$

4.6 (V) und (VI) gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 4 - \frac{7}{2}a &= -5 + 10a \quad | +5 \\ 9 - \frac{7}{2}a &= 10a \quad | +\frac{7}{2}a \\ 9 &= \frac{27}{2}a \quad | : \frac{27}{2} \\ a &= \frac{2}{3} \\ b &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1 \\ c &= -6 \cdot \frac{2}{3} = -4 \\ d &= 4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Ergebnis der Parameter:

$$a = \frac{2}{3} \quad b = -1 \quad c = -4 \quad d = \frac{5}{3}$$

5

Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f(x) &= \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

6

Wenn nötig, Bedingungen überprüfen

Hochpunkt $H(-1|4)$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4 \\ f'(-1) &= 0 \end{aligned} \quad \checkmark$$

Tiefpunkt $T(2|-5)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= -5 \\ f'(2) &= 0 \end{aligned} \quad \checkmark$$

2. Ableitung am Hochpunkt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4x - 2 \\ f''(-1) &= -6 < 0 \\ \text{also Hochpunkt.} \end{aligned} \quad \checkmark$$

2. Ableitung am Tiefpunkt:

$$\begin{aligned} f''(2) &= 6 > 0 \\ \text{also Tiefpunkt.} \end{aligned} \quad \checkmark$$

Damit sind alle Bedingungen erfüllt.



Ergebnis:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{5}{3}$$

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 3



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine achsensymmetrische ganzrationale Funktion 4. Grades.
Der Graph hat den Tiefpunkt $T(0|-2)$, verläuft durch den Punkt $P(2|6)$
und hat bei $x = 1$ eine Nullstelle.

1

Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Für eine ganzrationale Funktion 4. Grades verwenden wir den allgemeinen Ansatz:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

2

Symmetrie gegeben?

Ja. Achsensymmetrisch zur y-Achse bedeutet: keine ungeraden Potenzen im Ansatz.
Damit fallen die Terme mit x^3 und x weg. Der Ansatz vereinfacht sich zu:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 2c$$

3

Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Der Tiefpunkt bei $x = 0$ liefert direkt e . Punkt und Nullstelle liefern zwei weitere Gleichungen.

Tiefpunkt $T(0|-2)$:

$$f(0) = -2$$

$$e = -2 \quad (I)$$

Punkt $P(2|6)$:

$$f(2) = 6$$

$$16a + 4c + e = 6 \quad (II)$$

Nullstelle bei $x = 1$:

$$f(1) = 0$$

$$a + c + e = 0 \quad (III)$$

4

LGS lösen

Wir formen das Gleichungssystem Schritt für Schritt um.

4.1

e einsetzen:

Aus (I) folgt

$$e = -2.$$

4.2

In (III) einsetzen:

$$16a + 4c - 2 = 6 \quad | +2$$

$$16a + 4c = 8 \quad | :4$$

$$4a + c = 2 \quad (II')$$

4.3

In (III) einsetzen:

$$a + c - 2 = 0 \quad | +2$$

$$a + c = 2 \quad (III')$$

➡ Fortsetzung auf Seite 2

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 3



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine achsensymmetrische ganzrationale Funktion 4. Grades.
Der Graph hat den Tiefpunkt $T(0|-2)$, verläuft durch den Punkt $P(2|6)$
und hat bei $x = 1$ eine Nullstelle.

4

LGS lösen – Fortsetzung

4.4 (II') und (III') vergleichen:

$$(II') \quad 4a + b = 2$$

$$(III') \quad a + b = 2$$

$$(II') - (III'):$$

$$(4a + b) - (a + b) = 2 - 2$$

$$3a = 0$$

$$a = 0$$

4.5 Weitere Parameter bestimmen:

$$\text{Aus (III'):$$

$$0 + b = 2$$

$$b = 2$$

$$\text{Aus (I):}$$

$$c = -2$$

4.6 Parameter zusammenfassen:

$$a = 0$$

$$b = 2$$

$$c = -2$$

5

Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f(x) = 0 \cdot x^4 + 2x^2 - 2$$

$$f(x) = 2x^2 - 2$$

6

Wenn nötig, Bedingungen überprüfen

Tiefpunktprobe:

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 2 = -2$$

$$f''(0) = 4 > 0$$



Punktprobe:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 = 6$$



Nullstellenprobe:

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 2 = 0$$



Wichtige Schlussfolgerung:

Der x^4 -Term verschwindet, denn $a = 0$.

Damit entsteht keine Funktion 4. Grades, sondern nur eine Funktion 2. Grades.



Ergebnis:

Keine Lösung 4. Grades möglich; die Bedingungen führen nur zu $f(x) = 2x^2 - 2$.

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 4



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine punktsymmetrische ganzrationale Funktion 5. Grades.
Der Graph hat den Wendepunkt $W(1|2)$ mit der Steigung 3.

1

Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Zunächst verwenden wir den allgemeinen Ansatz einer ganzrationalen Funktion 5. Grades.

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

2

Symmetrie gegeben?

Ja. Punktsymmetrie zum Ursprung bedeutet: nur ungerade Potenzen bleiben erhalten.
Damit entfallen die Terme mit geraden Potenzen und der konstante Term. Der Ansatz vereinfacht sich zu:

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$

$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

3

Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Der Wendepunkt liefert Punkt-, Steigungs- und Wendebedingung.

Punkt $W(1|2)$:

$$f(1) = 2$$

$$a \cdot 1^5 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1 = 2$$

$$a + b + c = 2 \quad (I)$$

Steigung 3:

$$f'(1) = 3$$

$$5a \cdot 1^4 + 3b \cdot 1^2 + c = 3$$

$$5a + 3b + c = 3 \quad (II)$$

Wendepunktbedingung:

$$f''(1) = 0$$

$$20a \cdot 1^3 + 6b \cdot 1 = 0$$

$$20a + 6b = 0 \quad (III)$$

4

LGS lösen

Wir formen das Gleichungssystem Schritt für Schritt um.

4.1 b aus (III) ausdrücken:

$$20a + 6b = 0 \quad | :2$$

$$10a + 3b = 0 \quad | -10a$$

$$3b = -10a \quad | :3$$

$$b = -\frac{10}{3}a$$

4.2 b in (II) einsetzen:

$$5a + 3b + c = 3$$

$$5a + 3 \cdot \left(-\frac{10}{3}a\right) + c = 3$$

$$5a - 10a + c = 3$$

$$-5a + c = 3 \quad | +5a$$

$$c = 3 + 5a$$

4.3 b und c in (I) einsetzen:

$$a + \left(-\frac{10}{3}a\right) + (3 + 5a) = 2$$

$$\frac{8}{3}a + 3 = 2 \quad | -3$$

$$\frac{8}{3}a = -1 \quad | \cdot 3$$

$$8a = -3 \quad | :8$$

$$a = -\frac{3}{8} \rightarrow \text{Fortsetzung auf Seite 2}$$

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 4



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine punktsymmetrische ganzrationale Funktion 5. Grades.
Der Graph hat den Wendepunkt $W(1|2)$ mit der Steigung 3.

4 | LGS lösen – Fortsetzung

4.4 b berechnen:

$$b = -\frac{10}{3} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$b = \frac{5}{4}$$

4.5 c berechnen:

$$c = 3 + 5a$$

$$c = 3 + 5 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$c = \frac{24}{8} - \frac{15}{8}$$

$$c = \frac{9}{8}$$

4.6 Parameter zusammenfassen: Ergebnis der Parameter:

$$a = -\frac{3}{8}$$

$$b = \frac{5}{4}$$

$$c = \frac{9}{8}$$

5 | Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die angepasste Funktionsgleichung einsetzen:

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$f(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{9}{8}x$$

6 | Wenn nötig, Bedingungen überprüfen

Punktprobe $W(1|2)$:

$$f(1) = -\frac{3}{8} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8}$$

$$= 2$$



Steigungsprobe:

$$f'(1) = 5 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + 3 \cdot \frac{5}{4} + \frac{9}{8}$$

$$= 3$$



Wendepunktprobe:

$$f''(1) = 20 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + 6 \cdot \frac{5}{4}$$

$$= 0$$



Echter Wendepunkt:

$$f'''(x) = 60ax^2 + 6b$$

$$f'''(1) = 60 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + 6 \cdot \frac{5}{4}$$

$$= -15 \neq 0$$

also liegt tatsächlich ein Wendepunkt vor.



Damit sind alle Bedingungen erfüllt.



Ergebnis:

$$f(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{9}{8}x$$

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 5



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades. Der Graph hat bei $x = 2$ die Tangente $t(x) = 5x - 7$, verläuft durch den Punkt $P(1|2)$ und hat den Tiefpunkt $T(-1|-2)$.

1

Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Für eine ganzrationale Funktion 4. Grades verwenden wir den allgemeinen Ansatz.

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

2

Symmetrie gegeben?

Keine Symmetrie angegeben. Der allgemeine Ansatz bleibt unverändert.

3

Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Jede Bedingung wird zuerst vollständig eingesetzt und danach vereinfacht.

Tangente bei $x = 2$:

$$t(2) = 5 \cdot 2 - 7 = 3$$

also gilt $f(2) = 3$

$$f(2) = 3$$

$$a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = 3$$

$$16a + 8b + 4c + 2d + e = 3 \quad (I)$$

$$f'(2) = 5$$

$$4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 + d = 5$$

$$32a + 12b + 4c + d = 5 \quad (II)$$

Punkt $P(1|2)$:

$$f(1) = 2$$

$$a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e = 2$$

$$a + b + c + d + e = 2 \quad (III)$$

Tiefpunkt $T(-1|-2)$:

$$f(-1) = -2$$

$$a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^3 + c \cdot (-1)^2 + d \cdot (-1) + e = -2$$

$$a - b + c - d + e = -2 \quad (IV)$$

$$f'(-1) = 0$$

$$4a \cdot (-1)^3 + 3b \cdot (-1)^2 + 2c \cdot (-1) + d = 0$$

$$-4a + 3b - 2c + d = 0 \quad (V)$$

4

LGS lösen

Wir vereinfachen das Gleichungssystem Schritt für Schritt.

4.1

(III) und (IV) kombinieren:

$$(III) + (IV):$$

$$2a + 2c + 2e = 0 \quad | : 2$$

$$a + c + e = 0 \quad (A)$$

$$(III) - (IV):$$

$$2b + 2d = 4 \quad | : 2$$

$$b + d = 2 \quad (B)$$

4.2

(V) mit (B) verbinden:

$$\text{Aus (B): } d = 2 - b$$

$$-4a + 3b - 2c + (2 - b) = 0$$

$$-4a + 2b - 2c + 2 = 0$$

$$| + 4a \quad | + 2c \quad | - 2$$

$$2b = 4a + 2c - 2 \quad | : 2$$

$$b = 2a + c - 1 \quad (C)$$

4.3

d und e ausdrücken:

$$\text{Aus (B): } d = 2 - b$$

$$d = 2 - (2a + c - 1)$$

$$d = 3 - 2a - c$$

$$\text{Aus (A):}$$

$$e = -a - c$$

➔ Fortsetzung auf Seite 2

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 5



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades. Der Graph hat bei $x = 2$ die Tangente $t(x) = 5x - 7$, verläuft durch den Punkt $P(1|2)$ und hat den Tiefpunkt $T(-1|-2)$.

4 LGS lösen – Fortsetzung

4.4 In (II) einsetzen:

$$32a + 12b + 4c + d = 5$$

$$32a + 12(2a + c - 1) + 4c + (3 - 2a - c) = 5$$

$$54a + 15c - 9 = 5 \quad | +9$$

$$54a + 15c = 14 \quad (D)$$

4.5 In (I) einsetzen:

$$16a + 8b + 4c + 2d + e = 3$$

$$16a + 8(2a + c - 1) + 4c + 2(3 - 2a - c) + (-a - c) = 3$$

$$27a + 9c - 2 = 3 \quad | +2$$

$$27a + 9c = 5 \quad (E)$$

4.6 (D) und (E) lösen:

$$(E) \cdot 2: 54a + 18c = 10$$

$$(D): 54a + 15c = 14$$

$$(D) - (E \cdot 2): -3c = 4 \quad | :(-3)$$

$$c = -\frac{4}{3}$$

$$27a + 9 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 5$$

$$27a - 12 = 5 \quad | +12$$

$$27a = 17 \quad | :27$$

$$a = \frac{17}{27}$$

b berechnen:

$$b = 2a + c - 1$$

$$b = 2 \cdot \frac{17}{27} - \frac{4}{3} - 1$$

$$b = \frac{34}{27} - \frac{36}{27} - \frac{27}{27}$$

$$b = -\frac{29}{27}$$

d und e berechnen:

$$d = 3 - 2a - c = \frac{83}{27}$$

$$e = -a - c = \frac{19}{27}$$

Parameter zusammenfassen:

Ergebnis der Parameter:

$$a = \frac{17}{27} \quad b = -\frac{29}{27}$$

$$c = -\frac{4}{3} \quad d = \frac{83}{27} \quad e = \frac{19}{27}$$

5 Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen.

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f(x) = \frac{17}{27}x^4 - \frac{29}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{83}{27}x + \frac{19}{27}$$

6 Wenn nötig, Bedingungen überprüfen

Tangentenprobe:

$$f(2) = 3$$

$$f'(2) = 5$$



Punktprobe:

$$f(1) = 2$$



Tiefpunktprobe:

$$f(-1) = -2$$

$$f'(-1) = 0$$



Art des Extrempunkts:

$$f''(-1) = \frac{34}{3} > 0$$



Damit sind alle Bedingungen erfüllt.



Ergebnis:

$$f(x) = \frac{17}{27}x^4 - \frac{29}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{83}{27}x + \frac{19}{27}$$

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 6



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades. Der Graph verläuft durch den Punkt $P(2|8)$, hat bei $x = -1$ eine Nullstelle und im Ursprung einen Sattelpunkt.

1

Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Für eine ganzrationale Funktion 4. Grades verwenden wir den allgemeinen Ansatz:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$f'''(x) = 24ax + 6b$$

2

Symmetrie gegeben?

Keine Symmetrie gegeben. Der allgemeine Ansatz bleibt unverändert.

3

Aus gegebenen Eigenschaften Gleichungen erstellen (LGS)

Der Sattelpunkt im Ursprung liefert mehrere Bedingungen zugleich.

Punkt $P(2|8)$:

$$f(2) = 8$$

$$a \cdot 2^4 + b \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = 8$$

$$16a + 8b + 4c + 2d + e = 8 \quad (I)$$

Nullstelle bei $x = -1$:

$$f(-1) = 0$$

$$a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^3 +$$

$$c \cdot (-1)^2 + d \cdot (-1) + e = 0$$

$$a - b + c - d + e = 0 \quad (II)$$

Sattelpunkt im Ursprung $S(0|0)$:

$$f(0) = 0$$

$$a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0$$

$$e = 0 \quad (III)$$

$$f'(0) = 0$$

$$4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$$

$$d = 0 \quad (IV)$$

$$f''(0) = 0$$

$$12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0$$

$$2c = 0 \quad (V)$$

4

LGS lösen

Zuerst nutzen wir die einfachen Gleichungen (III), (IV) und (V).

4.1 In (I) einsetzen:

$$16a + 8b + 0 + 0 + 0 = 8$$

$$16a + 8b = 8 \quad |:8$$

$$2a + b = 1 \quad (I')$$

4.2 In (II) einsetzen:

$$a - b + 0 - 0 + 0 = 0$$

$$a - b = 0 \quad (II')$$

4.3 Beziehung aus (II'):

$$a = b$$

➔ Fortsetzung auf Seite 2

Lösungsblatt Grundkurs

Steckbriefaufgaben – Ausführlicher Lösungsweg zu Aufgabe 6



AUFGABENSTELLUNG

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades. Der Graph verläuft durch den Punkt $P(2|8)$, hat bei $x = -1$ eine Nullstelle und im Ursprung einen Sattelpunkt.

4

LGS lösen – Fortsetzung

4.4

a berechnen:

In (I') einsetzen:

$$2a + a = 1$$

$$3a = 1 \quad | :3$$

$$a = \frac{1}{3}$$

4.5

Weitere Parameter:

$$b = a = \frac{1}{3}$$

$$c = 0$$

$$d = 0$$

$$e = 0$$

4.6

Parameter zusammenfassen:

Ergebnis der Parameter:

$$a = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$c = 0$$

$$d = 0$$

$$e = 0$$

5

Berechnete Parameter einsetzen

Die gefundenen Werte in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen.

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

6

Wenn nötig, Bedingungen überprüfen

Punktprobe:

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{3} \cdot 2^4 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{8}{3} \\ &= 8 \end{aligned}$$



Nullstellenprobe:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{3} \cdot (-1)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$



Sattelpunktprobe:

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 0$$



Echter Sattelpunkt:

$$f''(x) = 8x + 2$$

$$f''(0) = 2 \neq 0$$

also liegt im Ursprung tatsächlich ein Sattelpunkt vor.



Damit sind alle Bedingungen erfüllt.



Ergebnis:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$