AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

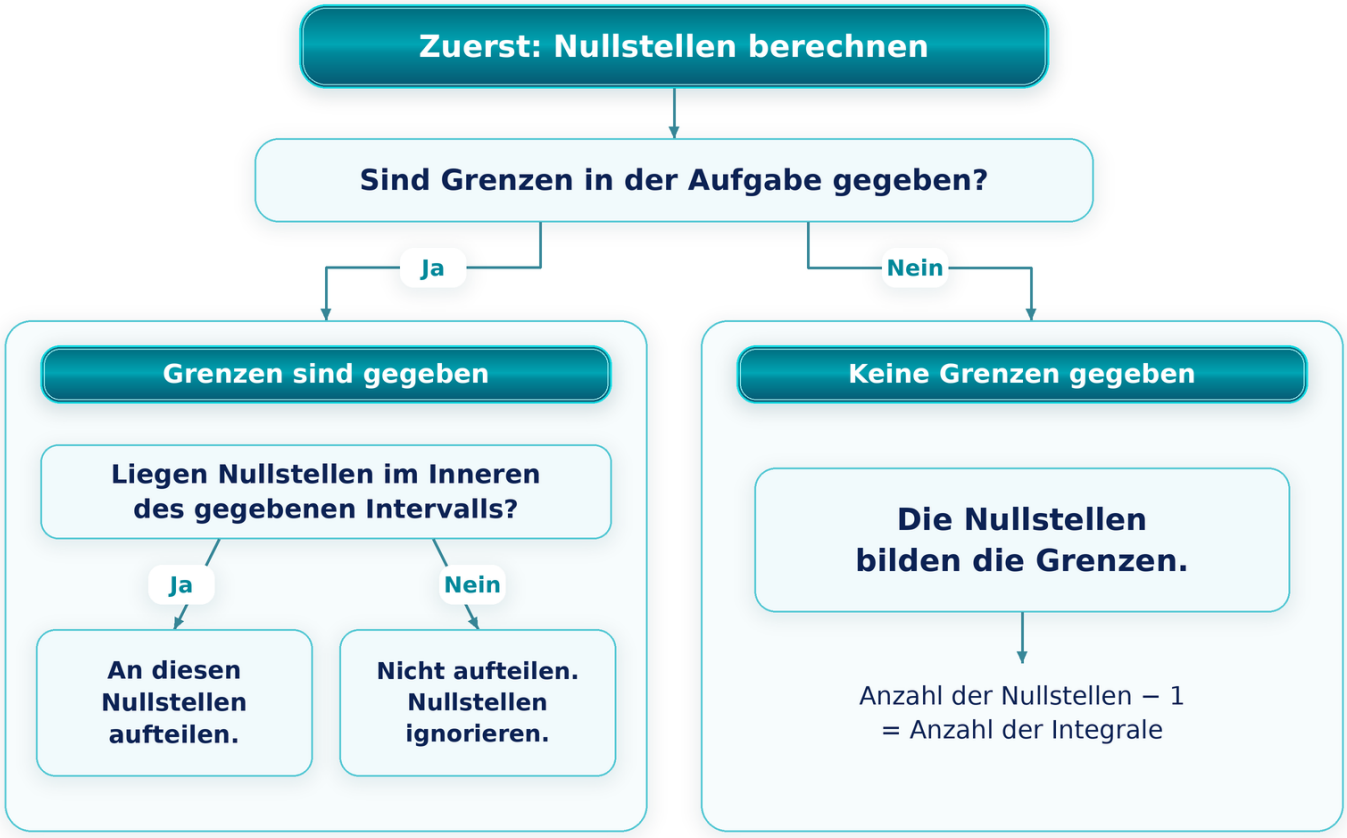
Mit und ohne Grenzen: sicher zur richtigen Gesamtfläche

DIE WICHTIGSTE IDEE

$$A_{GES} = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$$

A_1, A_2, A_3, … sind die einzelnen Teilflächeninhalte.
Berechne jede Teilfläche positiv und addiere anschließend.

Dein Entscheidungsschema



Wichtig: Gemeint sind verschiedene, geordnete Nullstellen und die dazwischen eingeschlossenen Flächen. Nullstellen an den Intervallgrenzen erzeugen keine zusätzlichen Intervalle.

Merksatz

Nullstellen → bei Bedarf aufteilen → Integrale berechnen → Teilflächen bestimmen → Teilflächen addieren.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Benötigtes Vorwissen: Lösungsstrategien für Nullstellen

Das solltest du vorher können

Für Nullstellen setzt du **f(x) = 0**. Welche Strategie passt, hängt von der Form der Funktionsgleichung ab.

Umformen und Wurzelziehen

Zum Beispiel bei $x^2 - 4 = 0$.

Ausklammermethode

Gemeinsame Faktoren aus allen Termen ausklammern.

Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist.

PQ-Formel

Für quadratische Gleichungen in der Form $x^2 + px + q = 0$.

Mitternachtsformel

Für quadratische Gleichungen in der Form $ax^2 + bx + c = 0$.

Substitutionsmethode

Zum Beispiel $z = x^2$ bei einer biquadratischen Gleichung.

Polynomdivision*

Ein Polynom mithilfe einer bekannten Nullstelle zerlegen.

Horner-Schema*

Alternative zur Polynomdivision und zum Einsetzen.

*** Oft erhöhtes Niveau oder Leistungskurs.**

Merksatz

Für die Abschlussaufgabe zusätzlich: Ableiten, eine Tangentengleichung bestimmen und Schnittpunkte zweier Graphen berechnen.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Beispiel ohne gegebene Grenzen: zwei Nullstellen, ein Integral

Beispiel: f(x) = x² − 4

1

$$x^2-4=0 \quad |+4$$

$$x^2=4 \quad |\sqrt{}$$

$$x_1=-2, \qquad x_2=2$$

2 **Keine Grenzen gegeben:** Die Nullstellen sind die Grenzen. **2 − 1 = 1 Integral** über [−2; 2]. Aufteilen ist nicht nötig.

3

$$\int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx$$

$$=\tfrac{1}{3}x^3-4x \Big|_{-2}^{2}$$

$$=\left(\tfrac{1}{3}\cdot 2^3-4\cdot 2\right)-\left(\tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3-4\cdot(-2)\right)$$

$$=\left(\tfrac{8}{3}-8\right)-\left(-\tfrac{8}{3}+8\right)$$

$$=-\tfrac{16}{3}-\tfrac{16}{3}$$

$$=-\tfrac{32}{3}$$

4

$$A_1=\left|-\tfrac{32}{3}\right|=\tfrac{32}{3}\ \text{FE}$$

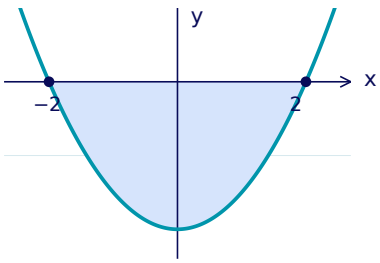
5

$$A_{GES}=A_1=\tfrac{32}{3}\ \text{FE}$$

Deine Schritte

1. **Nullstellen berechnen.**
2. **Bereich aufteilen,** wenn nötig.
3. **Integrale berechnen.**
4. **Teilflächen bestimmen.** Negativ? Betrag bilden.
5. **Teilflächen addieren.**

Kein separater Vorzeichentest nötig.
Berechne das Integral. Ist sein Ergebnis negativ, bilde den Betrag.



Merksatz **Erst das Integral ausrechnen.** −32/3 ist negativ; der Teilflächeninhalt ist deshalb 32/3 FE. Es gibt nur eine Teilfläche.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Beispiel mit Grenzen: beide Integrale zuerst, dann die Teilflächen

Beispiel: f(x) = x² − 1 auf [0; 2]

1

$$x^2 - 1 = 0 \quad | +1$$

$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

2

−1 liegt außerhalb; **1 liegt im Inneren.**
Aufteilen: [0; 1] und [1; 2].

3

$$\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 - x \Big|_0^1$$

$$= \left(\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - 1\right) - \left(\tfrac{1}{3} \cdot 0^3 - 0\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} - 1 - 0 = -\tfrac{2}{3}$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 - x \Big|_1^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{3} \cdot 2^3 - 2\right) - \left(\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - 1\right)$$

$$= \tfrac{8}{3} - 2 - \left(\tfrac{1}{3} - 1\right) = \tfrac{4}{3}$$

4

$$A_1 = \left| -\tfrac{2}{3} \right| = \tfrac{2}{3}\ \text{FE}$$

$$A_2 = \tfrac{4}{3}\ \text{FE}$$

5

$$A_{GES} = A_1 + A_2 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} = 2\ \text{FE}$$

Deine Schritte

1. **Nullstellen berechnen.**
2. **Bereich aufteilen,** wenn nötig.
3. **Integrale berechnen.**
4. **Teilflächen bestimmen.** Negativ? Betrag bilden.
5. **Teilflächen addieren.**

Beide Integrale gehören zu Schritt 3.

Erst in Schritt 4 werden daraus positive Teilflächeninhalte.

Gesamtfläche

2 FE

Merksatz

Nur innere Nullstellen teilen den Bereich. Der Gesamtflächeninhalt ist 2 FE; die Integrale selbst dürfen negativ sein.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Selbst üben: drei Aufgaben und eine Abschlussaufgabe auf Klausurniveau

Deine Übungsrunde

Berechne jeweils den gesamten Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse.
Zeige alle fünf Schritte und alle Einsetzrechnungen.

A $g(x) = -x^2 + 4$

Ohne Grenzen: die gesamte eingeschlossene Fläche.

B $h(x) = x^3 - 4x$

Mit Grenzen: der gesamte Flächeninhalt auf $[-1; 3]$.

C $k(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Ohne Grenzen. Nutze zum Berechnen der Nullstellen $z = x^2$.

Klammern und Vorzeichen beachten

Beim Einsetzen: obere Grenze minus die gesamte Klammer der unteren Grenze.

Negative Zahlen als Basis: Schreibe zum Beispiel $(-2)^3$.

Beim Flächeninhalt: Erst jedes Integral einzeln ausrechnen, dann negative Ergebnisse positiv nehmen. Niemals erst die Integralwerte addieren und danach den Betrag bilden.

Merksatz

Übung B: Es gibt drei Nullstellen, aber nur zwei liegen im Inneren von $[-1; 3]$. Die äußere Nullstelle -2 wird ignoriert.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Ausführliche Lösung A: Umformen und Wurzelziehen

A g(x) = −x² + 4 | ohne Grenzen

1

$$-x^2+4=0 \quad |-4$$

$$-x^2=-4 \quad |:(-1)$$

$$x^2=4 \quad |\sqrt{\ }$$

$$x_1=-2, \qquad x_2=2$$

2 **2 − 1 = 1 Integral.**
Die Nullstellen begrenzen [−2; 2].

3

$$\int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx$$

$$=-\tfrac{1}{3}x^3+4x \Big|_{-2}^{2}$$

$$=\left(-\tfrac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2\right)-\left(-\tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)\right)$$

$$=\left(-\tfrac{8}{3}+8\right)-\left(\tfrac{8}{3}-8\right)$$

$$=\tfrac{16}{3}-\left(-\tfrac{16}{3}\right)=\tfrac{32}{3}$$

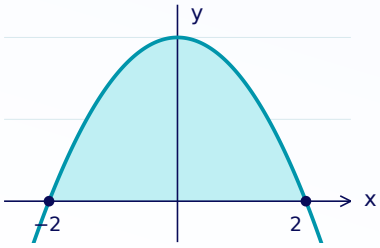
4 $A_1=\frac{32}{3}\ \text{FE}$

5 $A_{GES}=A_1=\frac{32}{3}\ \text{FE}$

Deine Schritte

1. **Nullstellen berechnen.**
2. **Bereich aufteilen,** wenn nötig.
3. **Integrale berechnen.**
4. **Teilflächen bestimmen.** Negativ? Betrag bilden.
5. **Teilflächen addieren.**

Das Integral ist positiv.
Sein Ergebnis ist bereits der Teilflächeninhalt.



Merksatz

Eine Teilfläche: Es gibt zwei verschiedene Nullstellen. Dazwischen liegt genau ein eingeschlossener Bereich.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Ausführliche Lösung B: Nullstellen, Intervall und erstes Integral

B h(x) = x³ − 4x | Grenzen: −1 und 3

1

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

Ausklammern und Satz vom Nullprodukt:
x = 0 oder x² − 4 = 0.

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$$

2

−2 liegt außerhalb von [−1; 3].
Innere Nullstellen: 0 und 2.
Intervalle: [−1; 0], [0; 2] und [2; 3].

3

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 \Big|_{-1}^{0}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2\right) - \left(\tfrac{1}{4} \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^2\right)$$

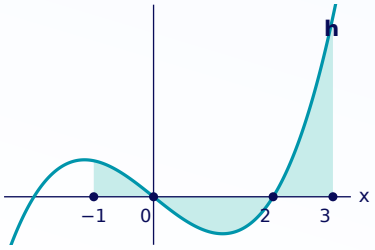
$$= 0 - \left(\tfrac{1}{4} - 2\right)$$

$$= 0 - \left(-\tfrac{7}{4}\right) = \tfrac{7}{4}$$

Deine Schritte

1. **Nullstellen berechnen.**
2. **Bereich aufteilen,** wenn nötig.
3. **Integrale berechnen.**
4. **Teilflächen bestimmen.** Negativ? Betrag bilden.
5. **Teilflächen addieren.**

Schritt 3 geht auf der nächsten Seite weiter:
Es fehlen noch zwei Integrale.



Die Grenzen −1 und 3 schließen drei Teilflächen ein.

Merksatz

Mit vorgegebenen Grenzen: Anzahl der Integrale = Anzahl der inneren Nullstellen + 1. Hier: 2 + 1 = 3.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Ausführliche Lösung B: weitere Integrale und Gesamtfläche

B Schritt 3 fortsetzen, danach Schritte 4 und 5

3

$$\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 \Big|_0^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2\right)$$

$$= (4 - 8) - (0 - 0) = -4$$

$$\int_2^3 (x^3 - 4x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 \Big|_2^3$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 2\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^2\right)$$

$$= \left(\tfrac{81}{4} - 18\right) - (4 - 8)$$

$$= \tfrac{9}{4} - (-4) = \tfrac{25}{4}$$

4

$$A_1 = \tfrac{7}{4}\ \text{FE}, \quad A_3 = \tfrac{25}{4}\ \text{FE}$$

$$A_2 = \left|-4\right| = 4\ \text{FE}$$

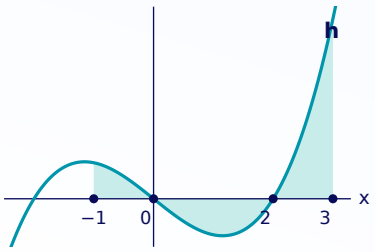
5

$$A_{GES} = \tfrac{7}{4} + 4 + \tfrac{25}{4} = 12\ \text{FE}$$

Deine Schritte

1. **Nullstellen berechnen.**
2. **Bereich aufteilen,** wenn nötig.
3. **Integrale berechnen.**
4. **Teilflächen bestimmen.** Negativ? Betrag bilden.
5. **Teilflächen addieren.**

Teilflächen:
A_1 auf $[-1; 0]$
A_2 auf $[0; 2]$
A_3 auf $[2; 3]$



Merksatz

Integralwerte und Flächeninhalte unterscheiden: Das mittlere Integral ist −4. Die zugehörige Teilfläche hat 4 FE.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Ausführliche Lösung C: Substitution und Rücksubstitution

C k(x) = x⁴ − 5x² + 4 | ohne Grenzen

1 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Substitution: z = x², also x⁴ = z².

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$p = -5, \quad q = 4$$

$$z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}}$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 4$$

Rücksubstitution: Für jeden z-Wert wieder x² = z lösen.

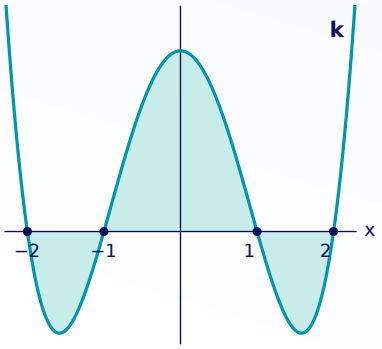
$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

2 $-2 < -1 < 1 < 2$

Deine Schritte

1. **Nullstellen:** z = x² setzen.
2. **Quadratische Gleichung** mit PQ-Formel lösen.
3. **Rücksubstitution:** x² = z lösen.
4. **Nullstellen ordnen.**
5. **Intervalle festlegen.**



Merksatz **4 − 1 = 3 Integrale:** Die vier verschiedenen Nullstellen liefern [−2; −1], [−1; 1] und [1; 2].

Flächeninhalt mit der x-Achse

Ausführliche Lösung C: äußere Teilintervalle

C Schritt 3: Integrale vollständig berechnen

3 $\int_{-2}^{-1} (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx$

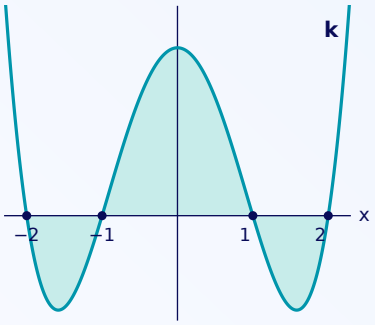
$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x \Big|_{-2}^{-1}$

$= \left(\frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{5}{3}(-1)^3 + 4(-1)\right)$

$\quad - \left(\frac{1}{5}(-2)^5 - \frac{5}{3}(-2)^3 + 4(-2)\right)$

$= \left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 4\right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{40}{3} - 8\right)$

$= -\frac{38}{15} - \left(-\frac{16}{15}\right) = -\frac{22}{15}$



$\int_{1}^{2} (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx$

$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x \Big|_{1}^{2}$

$= \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{5}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2\right)$

$\quad - \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{5}{3} \cdot 1^3 + 4 \cdot 1\right)$

$= \left(\frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4\right)$

$= \frac{16}{15} - \frac{38}{15} = -\frac{22}{15}$

Merksatz **Beide äußeren Integrale sind negativ.** Ihre Teilflächen werden erst in Schritt 4 positiv bestimmt.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Ausführliche Lösung C: mittleres Integral und Teilflächen

C Schritt 3 abschließen, dann Teilflächen addieren

3

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{5}{3}x^3 + 4x \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{5}\cdot 1^5 - \tfrac{5}{3}\cdot 1^3 + 4\cdot 1\right)$$

$$- \left(\tfrac{1}{5}(-1)^5 - \tfrac{5}{3}(-1)^3 + 4(-1)\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{5}{3} + 4\right) - \left(-\tfrac{1}{5} + \tfrac{5}{3} - 4\right)$$

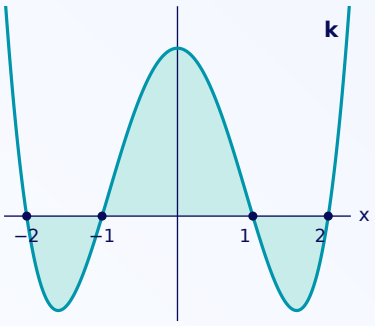
$$= \tfrac{38}{15} - \left(-\tfrac{38}{15}\right) = \tfrac{76}{15}$$

4

$$A_1 = \left| -\tfrac{22}{15} \right| = \tfrac{22}{15}\ \text{FE}$$

$$A_2 = \tfrac{76}{15}\ \text{FE}$$

$$A_3 = \left| -\tfrac{22}{15} \right| = \tfrac{22}{15}\ \text{FE}$$



5

$$A_{GES} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \tfrac{22}{15} + \tfrac{76}{15} + \tfrac{22}{15}$$

$$= \tfrac{120}{15} = 8\ \text{FE}$$

Merksatz

Substitution nur für die Nullstellen: Die Stammfunktion bildest du hier direkt termweise mit der Potenzregel.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Abschlussübung: Tangente, Graph und x-Achse

D

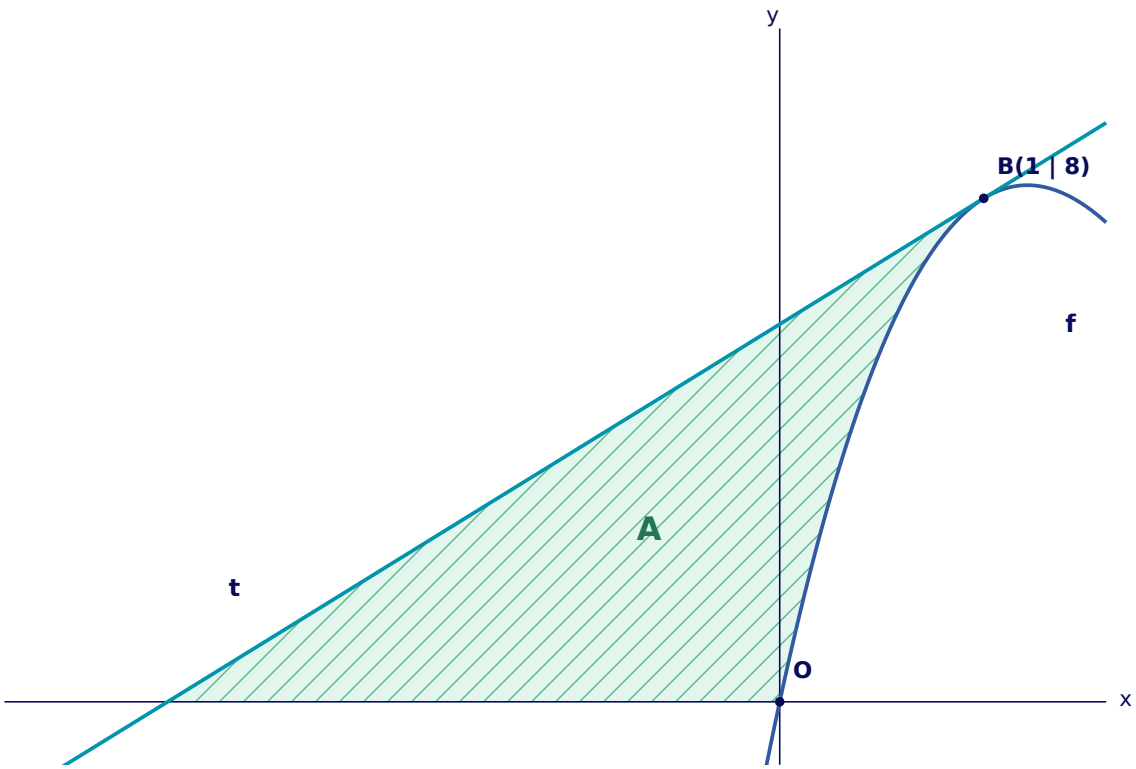
DEINE CHALLENGE

Deine Abschlussaufgabe

KLAUSURNIVEAU

Die Tangente an **f(x) = x³ − 8x² + 15x** im Punkt **B(1 | 8)** schließt mit f(x) und der x-Achse eine Fläche ein.

Bestimme den entstehenden Flächeninhalt.



DEIN RECHENWEG

Notiere deine Lösung nachvollziehbar mit einem exakten Ergebnis.

Merksatz

Selbstständig lösen: Nimm dir Zeit für die Abschlussaufgabe. Die ausführliche Lösung beginnt auf der nächsten Seite.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Klausurlösung: Tangente im Punkt B(1 | 8)

D · LÖSUNG

Tangente in vier Schritten aufstellen

1 **y-Koordinate prüfen**

$$f(1) = 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1$$

$$= 1 - 8 + 15 = 8$$

B(1 | 8) ist gegeben. Die y-Koordinate ist bereits bekannt.

2 $f'(x) = 3x^2 - 16x + 15$

$$m = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 15$$

$$= 3 - 16 + 15 = 2$$

3

$$8 = 2 \cdot 1 + b$$

$$8 = 2 + b \quad | -2$$

$$6 = b$$

4 $t(x) = 2x + 6$

Tangente aufstellen

Deine Schritte

1. **y-Koordinate berechnen,** wenn nötig.
2. **Steigung berechnen:** m = f′(x₀).
3. **b berechnen:** Punkt einsetzen.
4. **m und b einsetzen** in y = mx + b.

b ist der y-Achsenabschnitt.
Die Tangente hat hier b = 6.

Merksatz **Vier Schritte:** y-Koordinate, Steigung, b und schließlich m und b in y = mx + b einsetzen.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

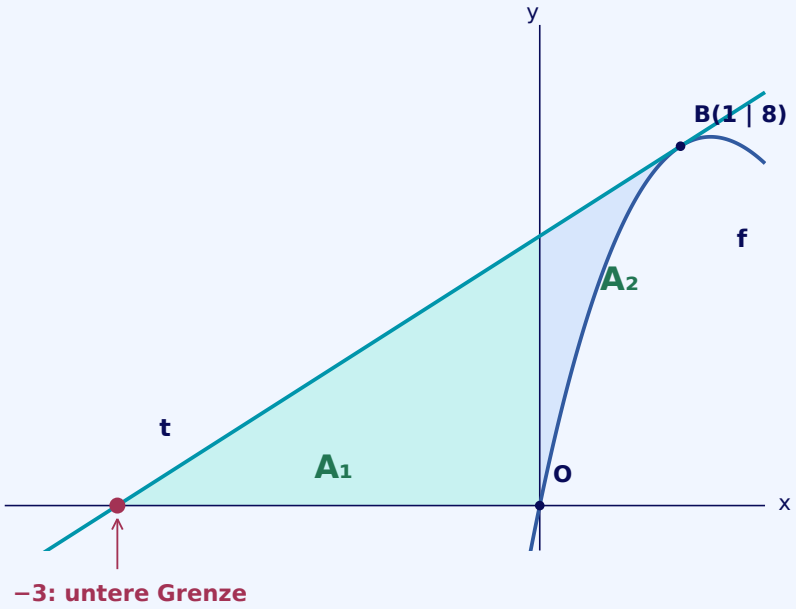
Flächeninhalt mit der x-Achse

Klausurlösung: Teil 1 – A_1 als Dreiecksfläche

D · LÖSUNG

Berechnung der einzelnen Teilflächen

Teil 1: A_1 berechnen – die Dreiecksfläche



A_1: das Dreieck
Zwischen Tangente und x-Achse.

A_2: die kleine Fläche
Zwischen Tangente und f.

Zuerst bestimmen wir die Grenzen von A_1.

Warum brauchen wir die Nullstelle der Tangente?
Sie ist der linke Rand von A_1 und damit die untere Integrationsgrenze. Rechts endet A_1 am Ursprung bei x = 0.

Nullstelle berechnen: Bedingung t(x) = 0

$$2x+6=0 \quad | -6$$

$$2x=-6 \quad | :2$$

$$x=-3$$

Die untere Grenze ist −3.
Die obere Grenze ist 0.

y-Achsenabschnitt ablesen:
t(x) = 2x + 6 → $S_y(0 \mid 6)$.

Merksatz

A_1 liegt auf [−3; 0]. Die Nullstelle der Tangente bestimmt den linken Rand; der y-Achsenabschnitt liefert später die Dreieckshöhe.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Klausurlösung: A_1 zwischen Tangente und x-Achse

D · LÖSUNG

Teil 1: A_1 – Integral und Dreiecksformel

Hauptweg: bestimmtes Integral

$$\int_{-3}^{0} (2x+6)\,dx$$

$$= x^2 + 6x \Big|_{-3}^{0}$$

$$= (0^2 + 6\cdot 0) - \big((-3)^2 + 6\cdot(-3)\big)$$

$$= 0 - (9 - 18)$$

$$= 0 - (-9) = 9$$

$$\boxed{A_1 = 9\ \text{FE}}$$

Alternative: Dreiecksformel

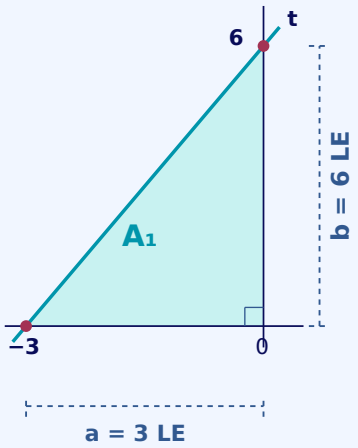
Kathete a: von −3 bis 0 → a = 3 LE.
Kathete b: vom Ursprung bis $S_Y(0 \mid 6)$ → b = 6 LE.

$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot a \cdot b$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot 6 = 9\ \text{FE}$$

Deine Schritte

1. **Grenzen festlegen:** −3 und 0.
2. **Integral berechnen.**
3. **Teilfläche angeben.**
4. **Alternative:** Dreiecksformel.



Merksatz

Beide Wege liefern 9 FE. Das Integral ist hier der Hauptweg; die Dreiecksformel ist eine schnelle Alternative und Kontrolle.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Klausurlösung: Ausblick auf Flächen zwischen zwei Funktionen

D · LÖSUNG

Teil 2: A_2 – die Differenzfunktion bilden

Ausblick: Fläche zwischen zwei Funktionen.
Auf [0; 1] liegt die Tangente oben und der Graph von f unten.

Untere Grenze: 0 | obere Grenze: 1

Die Grenzen stammen hier aus der Aufteilung bei x = 0 und dem Berührpunkt B bei x = 1.

Zuerst außerhalb des Integrals vereinfachen

$$d(x) = t(x) - (f(x))$$

$$= (2x + 6) - (x^3 - 8x^2 + 15x)$$

$$= 2x + 6 - x^3 + 8x^2 - 15x$$

$$d(x) = -x^3 + 8x^2 - 13x + 6$$

Dann erst integrieren:
Die vereinfachte Differenzfunktion d(x) gehört ins Integral.

Deine Schritte

1. **Grenzen angeben:** 0 und 1.
2. **Oben minus unten:** t(x) − (f(x)).
3. **Vereinfachen:** d(x) bilden.
4. **d(x) integrieren.**

Wichtig bei den Grenzen:
x = 0 ist hier eine Teilungsstelle. Es ist keine Schnittstelle von t und f.

x = 1 ist die Berührstelle der beiden Graphen.

Merksatz

Obere Funktion minus untere Funktion: d(x) = t(x) − f(x). Die Minusklammer ändert alle Vorzeichen von f.

AUTOR: JENNY KLIPPERT · EINFACH MATHE!

OBERSTUFE

Flächeninhalt mit der x-Achse

Klausurlösung: Differenzfunktion integrieren und Gesamtfläche bilden

D · LÖSUNG

Teil 2: A_2 ausrechnen, dann $A_1 + A_2$

$$\int_0^1 d(x)\,dx = \int_0^1 (-x^3+8x^2-13x+6)\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{8}{3}x^3-\tfrac{13}{2}x^2+6x \Big|_0^1$$

$$= \left(-\tfrac{1}{4}\cdot 1^4+\tfrac{8}{3}\cdot 1^3-\tfrac{13}{2}\cdot 1^2+6\cdot 1\right)$$

$$-\left(-\tfrac{1}{4}\cdot 0^4+\tfrac{8}{3}\cdot 0^3-\tfrac{13}{2}\cdot 0^2+6\cdot 0\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}+\tfrac{8}{3}-\tfrac{13}{2}+6-0$$

$$= -\tfrac{3}{12}+\tfrac{32}{12}-\tfrac{78}{12}+\tfrac{72}{12}$$

$$= \tfrac{-3+32-78+72}{12} = \tfrac{23}{12}$$

$$A_2 = \tfrac{23}{12}\ \text{FE}$$

Kontrolle:
$A_1 = 9$ FE.
$A_2 \approx 1{,}92$ FE.
Gesamt ≈ 10,92 FE.

$$A_{GES} = A_1 + A_2 = 9 + \tfrac{23}{12}$$

$$= \tfrac{108}{12} + \tfrac{23}{12}$$

$$= \tfrac{131}{12}\ \text{FE}$$

Merksatz

Gesamtfläche: $A_1 + A_2 = 131/12$ FE. Die Tangentenfläche und die Fläche zwischen den beiden Graphen werden positiv addiert.